§ 6 Dynamik der Translation

6.1 Die Newton‘sche Axiome

Die Newton‘sche Axiome besagen, nach welchen Gesetzen sich Massenpunkte im Raum bewegen.

6.1.1 Erstes Newton‘sches Axiom (Trägheitsgesetz = law of inertia)

Das erste Newton‘sche Axiom lautet:

> Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, falls keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.

Mathematisch können wir dies ausdrücken als

$$\vec{v} = \text{const., wenn } \vec{F} = 0$$

wobei die Kräfte nach dem englischen Begriff ("force") mit $\vec{F}$ bezeichnet werden und Vektorcharakter haben.

Nach unserer Definition der Beschleunigung $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ bedeutet dies, dass sie Null sein muss, da sie die Änderung einer konstanten Größe darstellt.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{const.}) = 0, \text{ wenn } \vec{F} = 0}$$

Wirkt also keine Kraft auf einen Körper, so bewegt er sich nicht oder, falls er schon in Bewegung ist, bewegt sich, ohne schneller oder langsamer zu werden, geradeaus weiter.

Um eine Bewegungsänderung zu erreichen, muss deshalb auf den Körper eine Kraft wirken.

Frage: Wie ändert sich die Bewegung, wenn es eine Kraft gibt?
$\Rightarrow$ Darauf gibt das 2. Newton‘sche Axiom Antwort.

6.1.2 Zweites Newton‘sches Axiom

Das zweite Newton‘sche Axiom lautet:

> Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist proportional zur äußeren Kraft, die auf den Körper wirkt.

Dazu müssen wir sagen, wie der **Impuls** ("momentum") definiert ist. Er wird mit $\vec{p}$ bezeichnet und ist ebenfalls ein Vektor.

$\boxed{\vec{p} := m \cdot \vec{v}}$ Impuls

6.1 Die Newton‘sche Axiome

Der Impuls eines Massenpunktes hat also die gleiche Richtung wie dessen Geschwindigkeit und ist betragsmäßig gleich dem Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.

Dabei ist *m* die Masse des Körpers (träge Masse). Die Masse ist die 3. Basisgröße in der Physik mit der Einheit [*m*] = 1 kg (Basiseinheit = Urkilogramm).

Die Einheit des Impulses wird damit

$$[\vec{p}] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Das zweite Axiom besagt also

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \sim \vec{F}$$

Die Proportionalitätskonstante ist in diesem Fall Eins, d. h.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}}$$

2. Newton‘sche Axiom

Zusammenhang mit dem dynamischen Grundgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m \cdot \vec{v}\right] = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{a}}$$

zeitl. Änderung
der Masse

Ist ferner die Masse zeitlich konstant, was oft der Fall ist, dann gilt, da $\frac{dm}{dt} = 0$ ist,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Beispiele, bei denen *m* nicht konstant ist, sind

a) aufsteigende Rakete, die durch die Verbrennung von Treibstoff kontinuierlich leichter wird, oder

b) Fälle von sehr hohen Geschwindigkeiten, bei denen aufgrund der Relativitätstheorie die Masse bis ins Unendliche zunehmen kann.

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Die Kraft schließlich hat die Einheit

$$\boxed{\left[\vec{F}\right] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} =: \mathrm{N(ewton)}}$$

veraltete Krafteinheit: 1 kp = 9,81 N = Kraft, die auf 112 g auf der Erde wirkt

Das zweite Newton‘sche Axiom sagt uns also, dass wir, wenn wir die Kräfte, die an einer Masse angreifen, kennen, deren resultierende Bewegung über die Impulsänderung berechnen können.

2. Newton‘sche Axiom in integraler Form – Kraftstoß und Impulsänderung

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}t$$

Integration:

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} \mathrm{d}\vec{p} = \int_0^t \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_0^t \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\vec{p} = \vec{p}_0 + \int_0^t \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t}$$

Kraftstoß
(Zeitintegral über die Kraft)

Anfangsimpuls

6.1.3 Drittes Newton‘sches Axiom

Das dritte Newton‘sche Axiom lautet:

> Bei der Wechselwirkung zweier Körper 1 und 2 ist die Kraft $\vec{F}_{21}$, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft $\vec{F}_{12}$ von Körper 2 auf Körper 1.

Mathematisch formuliert heißt das

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

und wird lateinisch so ausgedrückt:

actio est reactio

Typische Beispiele für dieses Gesetz sind

a) zwei Boote, die mit einer Leine verbunden sind. Eine Person in einem Boot versucht, das andere Boot an der Leine zu sich heranzuziehen. Es bewegen sich aber immer beide Boote auf den gemeinsamen Mittelpunkt zu.

b) Rückstoß bei einem Gewehr:
Die explodierenden Pulverdämpfe erzeugen eine Kraft F_1 nach vorne auf das Geschoss und eine gleichgroße Gegenkraft F_2 auf das Gewehr nach hinten (Rückstoß).
Frage: Warum soll man das Gewehr festhalten ?

Ähnlich wichtig ist das **Superpositionsprinzip**.

Es lautet:

Greifen an einem Punkt mehrere Kräfte an, so ist die Gesamtkraft (resultierende Kraft) die Vektorsumme der Einzelkräfte.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Für jede der Komponenten F_x, F_y, F_z gilt dann eine entsprechende Relation.

$$F_x = \sum_i F_{x_i}, \quad F_y = \sum_i F_{y_i}, \quad F_z = \sum_i F_{z_i}$$

Gilt $\sum_i \vec{F}_i = 0$, so ist die Gesamtkraft Null und ein anfangs ruhender Körper bleibt in Ruhe. Man sagt, die Kräfte sind im Gleichgewicht.

Bemerkung:

Dieses Prinzip erweist sich als ausgesprochen nützlich, und wir müssen es dann zu Hilfe nehmen, wenn gleichzeitig mehrere Kräfte an einem Massenpunkt angreifen. Dann soll gelten, dass mehrere Kräfte auf einem Massenpunkt sich immer in ihrer Wirkung zu einer Gesamtkraft addieren. Umgekehrt gilt, dass sich beliebige Kräfte immer in ihre Komponenten zerlegen lassen. Dies nutzt man aus, um z. B. vertikale und horizontale Anteile einer Kraft voneinander zu trennen.

6.3 Anwendung der Axiome

Wozu haben wir die Axiome vorgestellt?

Um die Bewegung eines Massenpunktes vorherzusagen oder zu beschreiben, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte bekannt sind.

Nehmen wir die Schwerkraft ("gravity") als Beispiel einer Kraft, die aufgrund der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ an der Erdoberfläche an eine Masse m angreift.

Auf eine Masse m im Gravitationsfeld nur eine Kraft entlang der z-Achse, es gibt keine Kräfte in x- und y-Richtung.

Damit gilt nach dem 1. Newton'schen Axiom, dass die Masse in diesen Richtungen (x, y) in Ruhe oder in gleichförmig geradliniger Bewegung bleibt, d. h. $v_x = \text{const.}$ und $v_y = \text{const.}$.

Für die z-Richtung gilt hingegen

$$F_z = -m \cdot g \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{bmatrix}$$

Das 2. Newton‘sche Axiom sagt uns

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \quad \text{bzw.} \quad m \cdot a_z = F_z, \text{ da } m = const.$$

Damit wird

$$F_z = -m \cdot g = m \cdot a_z$$

oder mit $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = a_z$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z} = -g}$$

Bewegungsgl. in *z*-Richtung

oder allgemein:

$$\boxed{\ddot{\vec{x}} = \vec{g}}$$

Bewegungsgleichung

Das ist die Bewegungsgleichung in der die physikalische Problematik steckt.

6.3 Anwendung der Axiome

Die Lösung dieser gleichmäßig beschleunigten Bewegung kennen wir schon von früher und ist für die Anfangsbedingung $v_0(t) = 0$ und $z(t = 0) = z_0$.

$$\boxed{\begin{aligned} z(t) &= z_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ \vec{x}(t) &= \vec{x}_0 - \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 \end{aligned}}$$

Bemerkenswert an diesem einfachen Beispiel ist, dass die Masse in dem Problem gar keine Rolle spielt, was unserem täglichen Erfahrungsschatz zu widersprechen scheint. Dies ist auf den Luftwiderstand (bzw. Luftreibung) zurückzuführen, wie wir in unserem Experiment in einer evakuierten Röhre gesehen haben.

6.3.2 Anwendung des 2. Newton‘schen Axioms

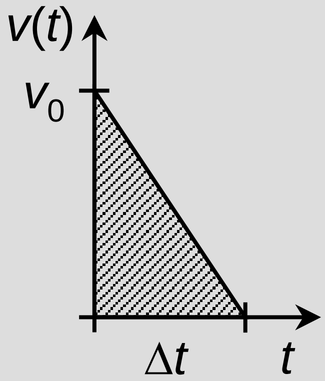
Kraftstoß – mittlere Kraft

Ein Pkw fährt mit $\vec{v}_0 = 50\,\mathrm{km/h} = 13{,}88\,\mathrm{m/s}$ vor eine Mauer und verkürzt sich dabei um 0,7 m ($m_{\mathrm{Pkw}} = 1000$ kg).

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\cdot\vec{v}_2 - m\cdot\vec{v}_1 = m\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) =$$

$$= 1000\,\mathrm{kg}\cdot(0 - 50\,\mathrm{km/h}) = 1000\cdot(-13{,}88)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s} = -13880\,\mathrm{Ns}$$

Impulsverlust des Pkw



$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\vec{s}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{s}(t) - \vec{s}_0 = \int \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t \overset{\vec{v}(t) = \vec{v}_0\cdot(1 - t/\Delta t)}{=} \vec{v}_0\cdot\int_0^{\Delta t}\left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)\mathrm{d}t = v_0\cdot\Delta t - v_0\cdot\frac{\Delta t}{2}$$