7 Verschiedene Kräfte
- 7.1 Schwerkraft oder Gewichtskraft
- 7.2 Gravitation – Massenanziehung
- 7.3 Federkraft – elastische Verformung
- 7.4 Reibungskräfte
  - 7.4.1 Äußere Reibung zwischen Festkörperoberflächen
    - 7.4.1.1 Haftung („Haftreibung“)
    - 7.4.1.2 Gleitreibung
    - 7.4.1.3 Rollreibung
  - 7.4.2 Innere Reibung
    - 7.4.2.1 Stoke‘sche Reibung oder viskose Reibung
    - 7.4.2.2 Newton-Reibung
- 7.5 Trägheitskräfte (Beschleunigte Bezugssysteme)
  - 7.5.1 Geradlinige beschleunigte Bezugsysteme
  - 7.5.2 Gleichförmig rotierende Bezugsysteme

7.1 Schwerkraft oder Gewichtskraft

Jeder Körper fällt mit der Erd- oder Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ zu Boden. Ursache ist die von der Erde ausgehende Erdanziehungskraft (= Gewichtskraft).

$\boxed{\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}}$ Gewichtskraft, Gewicht

Das Gewicht eines Körpers von $m = 1$ kg Masse beträgt

$$\left|\vec{F}_G\right| = 1\mathrm{kg} \cdot |\vec{g}| = 1\mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \mathrm{m/s^2} = 9{,}81\mathrm{N} \ \ (= 1\mathrm{kp})$$

Anwendungsbeispiel: Massenvergleichswaage (Hebelgesetz)

Zwei Massen sind gleich, wenn ihre Gewichte gleich sind.

Balkenwaage mit zwei gleichlangen Armen: $l_1 = l_2 = l$

Im Gleichgewicht gilt: $l \cdot F_{z,m_x} = l \cdot m_x \cdot g = l \cdot m_s \cdot g = l \cdot F_{z,m_s}$

$$m_x = m_s$$

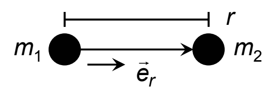
(m_s = Normmassen, „Gewichte“)

7.2 Gravitation – Massenanziehung

In unserem Beispiel haben wir die Gravitationskraft angewendet, ohne zu sagen, was sie eigentlich ist.

Das „Gravitationsgesetz“ [law of gravity], das ebenfalls von Newton stammt, besagt, dass jede Masse m_1 im Universum jede andere Masse m_2 wiederum im gesamten Universum mit einer Kraft anzieht, die den beiden Massen proportional und dem Abstandsgesetz umgekehrt proportional ist.

$$\vec{F} \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$



wobei die Richtung der Kraft entlang des Verbindungsvektors der beiden Massen zeigt. Die Richtung ist also durch den Vektor $\vec{e}_r$ gegeben, dessen Betrag $|\vec{e}_r| = 1$.

Die Proportionalitätskonstante ist die berühmte Gravitationskonstante G, die die Stärke der Kraft bestimmt, so dass

$$\boxed{\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r}$$

das Gravitationsgesetz darstellt. Das Vorzeichen ist negativ, da sich zwei Massen anziehen.

7.2 Gravitation – Massenanziehung

Gravitationskonstante G

$$\boxed{G = (6{,}673 \pm 0{,}005) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}}$$

Das Gravitationsgesetz ist außerordentlich bedeutsam für

a) **die gesamte Kosmologie** – alle Galaxien, Sterne, Planeten und Monde bewegen sich nach diesen Gesetzen.

- Entdeckung des Planeten Pluto
- Problem der „dunklen Materie“ (nur 10% der gesamten Masse durch sichtbare Sterne bekannt)

b) **auch auf der Erde bedeutsam:**

- alle Gegenstände fallen auf die Erde
- Mondbewegung $\rightarrow$ Ebbe und Flut

Messung der Gravitationskonstante – Cavendish (1731-1810)

Die Messapparatur von Cavendish bestand aus einem empfindlichen Torsionsschwinger mit zwei gleichen Massen m_1 (Torsionswaage → Verdrillen eines steifen Drahtes mit Spiegel).

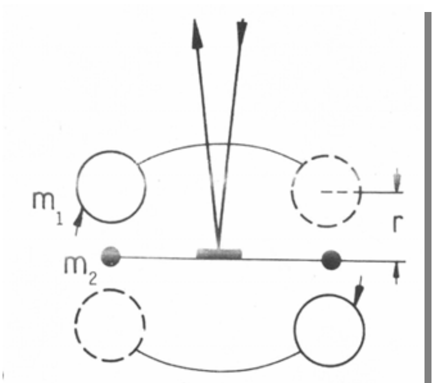
Die Schwingungen dieses Systems wurden über die Massenanziehung zu zwei in die Nähe gebrachten Zusatzmassen m_2 in die Positionen A-B bzw. A'-B' beeinflusst. Die Beobachtung der Schwingung erfolgt über einen Lichtzeiger.

Diese Anziehung der beiden Kugeln kann im Labor nachgewiesen werden.

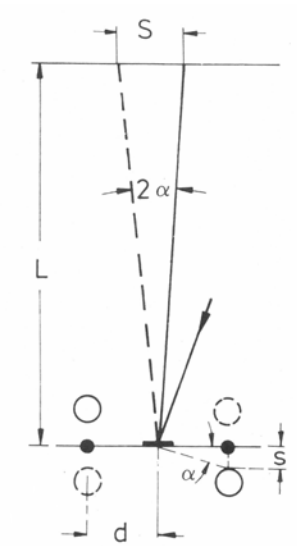
Wie klein die Kraft ist, kann man für das Beispiel zweier Kugeln, die je 1 kg Masse haben sollen und 10 cm voneinander entfernt seien, ausrechnen.

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot 1\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{kg}}{0{,}1^2\ \mathrm{kg}^2 \cdot \mathrm{m}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}$$

Um nach dem Gravitationsgesetz eine größere Kraft zu erzeugen, brauchen wir große Massen.



Schematische Darstellung der Gravitationswaage - Drehwaage



Weg des Lichtzeigers

Auf der Erdoberfläche gilt für eine Masse m

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{G \cdot m_E}{r_E^2} \cdot m \cdot \vec{e}_r = m \cdot \vec{g}}$$

m_E = Erdmasse, r_E = Erdradius

Mit $\vec{e}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$ gilt

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{bmatrix} = -\frac{G \cdot m_E}{r_E^2} \cdot m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Damit wird

$$\boxed{g = \frac{G \cdot m_E}{r_E^2}}$$

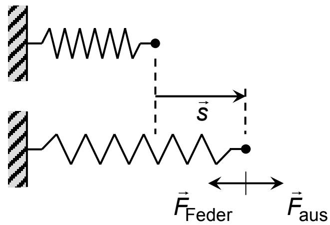
Mit $r_E = 6{,}371 \cdot 10^6$ m und $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg folgt $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Schwerkraft in anderen Systemen

	Radius r	Masse m	Beschleunigung g
Erde	$6{,}371 \cdot 10^6$ m	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg	9,81
Mond	$1{,}74 \cdot 10^6$ m	$7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg	$\sim 1{,}6$
Sonne	$7 \cdot 10^5$ km	$2 \cdot 10^{30}$ kg	~ 272
Neutronenstern	10 km	$\sim 2 \cdot 10^{30}$ kg	$1{,}3 \cdot 10^{12}$

7.3 Federkraft – elastische Verformung

Um eine elastische Feder um die Strecke $\vec{s}$ zu dehnen, ist eine Kraft $\vec{F}$ nötig:



ungedehnte Feder
$\vec{F} = 0$; $\vec{s} = 0$

$\vec{F}_{\text{aus}}$ = auslenkende Kraft; greift von außen an

$\vec{F}_{\text{Feder}}$ = rücktreibende Kraft der Feder = Gegenkraft

Zusammenhang zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$:

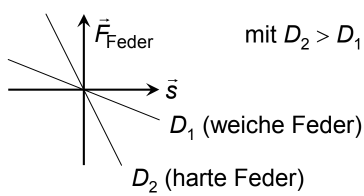
$\vec{F}_{\text{aus}} \sim \vec{s}$

$\vec{F}_{\text{Feder}} \sim -\vec{s}$

$\boxed{\vec{F} = -D \cdot \vec{s}}$ lineares Kraftgesetz der Feder

D = Federkonstante (auch C oder f genannt); $[D] = 1\ \text{N/m}$

7.3 Federkraft – elastische Verformung



Das lineare Kraftgesetz der Feder gilt nicht für beliebig große Auslenkungen, sondern nur im (begrenzten) „Elastizitätsbereich“. Er ist gekennzeichnet durch:

- $\vec{F} \sim \vec{s}$, d. h. Linearität
- $\vec{s} = 0$ für $\vec{F} = 0$, d. h. Rückkehr der Feder in die Ausgangslage nach Entspannung

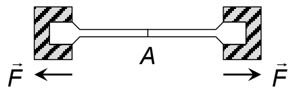
Verallgemeinerung: Hooke‘sches Gesetz

Jeder Körper verhält sich wie eine elastische Feder, gleich welche Formänderung vorliegt, die Formänderung muss nur hinreichend klein sein.

Die Formänderung (Dehnung, Biegung, Torsion, Scherung) ist der angreifenden Kraft proportional.

7.3 Federkraft – elastische Verformung

Beispiel: Dehnung eines Stabes



$F =$ dehnende Kraft

$A =$ Querschnitt des Probestabes

$l_0 =$ Ausgangslänge

$l = l_0 + \Delta l =$ gedehnte Länge

$|\vec{F}| \sim \Delta l$

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \varepsilon}$$

Hooke'sches Gesetz der Dehnung

$\boxed{\text{Spannung} = \text{Elastizitätsmodul} \cdot \text{Dehnung}}$

$\sigma = \dfrac{F}{A} =$ Spannung

$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0} =$ Dehnung

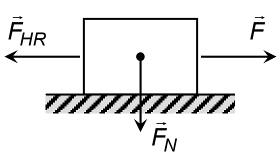
$E =$ Materialkonstante, Elastizitätsmodul, $[E] = \mathrm{N/m^2}$

7.4 Reibungskräfte

7.4.1 Äußere Reibung zwischen Festkörperoberflächen

7.4.1.1 Haftung („Haftreibung“)

Um einen Körper auf ebener Unterlage **in Bewegung zu setzen**, muss die angreifende Kraft $\vec{F}$ einen Grenwert $\vec{F}_0$ übertreffen.



$|\vec{F}| < |\vec{F}_0|$ Ruhe

$|\vec{F}| > |\vec{F}_0|$ Bewegung

$\vec{F}_{HR} = \vec{F}_0 =$ Haftkraft

Experimentell findet man: $|\vec{F}_0| \sim |\vec{F}_N|$ ($\vec{F}_N =$ Normalkraft auf Oberfläche)

$$\boxed{|\vec{F}_0| = |\vec{F}_{HR}| = \mu_0 \cdot |\vec{F}_N|}$$

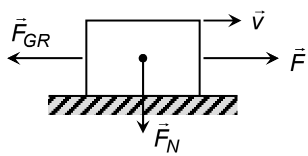
Coulomb'sches Haftungsgesetz

$\mu_0 =$ Haftreibungszahl

$\vec{F}_{HR}$ wirkt entgegen der Kraft $\vec{F}$ und ist parallel zur Oberfläche.

7.4.1.2 Gleitreibung

Um einen Körper auf ebener Unterlage mit $\vec{v} = \text{const.}$ zu bewegen, ist eine Reibungskraft $\vec{F}_{GR}$ zu überwinden.



$\lvert\vec{F}\rvert > \lvert\vec{F}_{GR}\rvert$	Beschleunigung
$\lvert\vec{F}\rvert < \lvert\vec{F}_{GR}\rvert$	Ruhe, Bremsung
$\lvert\vec{F}\rvert = \lvert\vec{F}_{GR}\rvert$	$\vec{v} = \text{const.}$

$$\boxed{\lvert\vec{F}_{GR}\rvert = \mu \cdot \lvert\vec{F}_N\rvert}$$

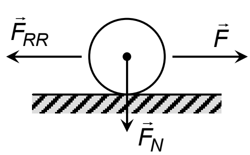
Coulomb'sches Gleitreibungsgesetz

$\mu =$ Gleitreibungszahl

$\mu \le \mu_0$

7.4.1.3 Rollreibung

Um ein Rad auf ebener Unterlage mit $\vec{v} = \text{const.}$ zu bewegen (rollen), ist eine Rollreibungskraft $\vec{F}_{RR}$ zu überwinden.



$$\boxed{\lvert\vec{F}_{RR}\rvert = \mu_{RR} \cdot \lvert\vec{F}_N\rvert}$$

Rollreibungsgesetz

$\mu_{RR} =$ Rollreibungszahl

$\mu_{RR} \ll \mu, \mu_0$

Für all diese drei äußeren Reibungskräfte spielt die Normalkraft (d. h. die Kraft, die normal auf die Oberfläche wirkt) eine entscheidende Rolle.

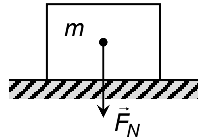
$\boxed{\text{Normalkraft } \vec{F}_N = \text{Kraft, mit der der Körper senkrecht auf die Unterlage drückt}}$

(d.h. $\vec{F} \perp$ Oberfläche oder $\vec{F} \parallel \vec{A}$)

Normalkraft

bei waagrechter Unterlage:

$$\left|\vec{F}_N\right| = m \cdot g$$

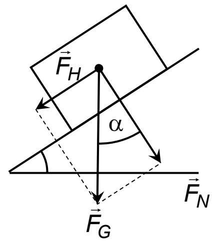


bei schiefer Ebene:

$$\left|\vec{F}_N\right| = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{F}_G = \vec{F}_N + \vec{F}_H$$

$$\left|\vec{F}_H\right| = m \cdot g \cdot \sin\alpha \qquad \text{Hangabtriebskraft}$$



Beispiel: Bremsen eines Kfz

Das Bremsvermögen eines Kfz hängt entscheidend von der Haftung zwischen Rädern und Straße ab.

$$\left|\vec{F}_N\right| = m \cdot g$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{F}_0\right| = m \cdot g \cdot \mu_0 \\ \left|\vec{F}_{Br}\right| = m \cdot a_{Br_{\max}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Haftkraft} \\ = \text{maximale Bremskraft} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad a_{Br_{\max}} = \mu_0 \cdot g \underset{\substack{\mu_0 = 0{,}9 \\ \text{(Gummi auf Asphalt)}}}{=} 0{,}9 \cdot 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8{,}83 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\boxed{s_{Br} = \frac{v_0^2}{2 \cdot a_{Br_{\max}}}} \qquad \text{minimaler Bremsweg}$$

Mit $v_0 = 100$ km/h $= 27{,}77$ m/s ergibt sich ($s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{2s/a}$):

$s_{Br} = 43{,}7$ m und $t_{Br} = 3{,}15$ sec

7.4.2 Innere Reibung

Sie findet im Inneren von Flüssigkeiten und Gasen zwischen den leicht gegeneinander verschiebbaren Molekülen oder Atomen statt. Typisch für die Innere Reibung ist:

- Es gibt keine Ruhereibung: $\left|\vec{F}_0\right| = 0$
- Die Gleitreibung ist geschwindigkeitsabhängig, z. B. $\left|\vec{F}_R\right| \sim v$

7.4.2.1 Stoke'sche Reibung oder viskose Reibung

Bewegt sich ein Körper mit geringer Geschwindigkeit durch ein zähes Medium, so ist der innere Reibungswiderstand

$\left|\vec{F}_R\right| \sim |\vec{v}|$ (laminare Strömung)

Beispiel: Eine Kugel fällt durch eine zähe Flüssigkeit, z. B. ein Öl

„Stoke'sches Gesetz"

$\boxed{\vec{F}_R = -6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta \cdot \vec{v}}$ Reibungswiderstand der Kugel

mit $R =$ Kugelradius, $\eta =$ Zähigkeit der Flüssigkeit, $[\eta] = \dfrac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa \cdot s}$

Die Kugel erreicht schließlich eine konstante Fallgeschwindigkeit $\vec{v}_0$, bei der gilt:

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_G \quad \Rightarrow \quad -6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = -\frac{m}{6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta} \cdot \vec{g}$$

$$\boxed{v_z = \frac{m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta}}$$

7.4 Reibungskräfte

7.4.2.2 Newton-Reibung

Bewegt sich ein Körper mit hoher Geschwindigkeit durch ein Medium geringer Zähigkeit, so ist der innere Reibungswiderstand

$$\vec{F}_R \sim -\vec{v}^2$$

Ursache: Turbulenz, Wirbelbildung, …

Beispiel: Luftwiderstand

$$\boxed{\vec{F}_L = -c_W \cdot A \cdot \frac{\rho \cdot \vec{v}^2}{2} \cdot \vec{e}_v}$$

mit $\rho =$ Dichte des Mediums (Luft), $A =$ Anströmfläche (Schatten),
$c_W =$ Formfaktor (c_w-Wert)

7.5 Trägheitskräfte

Trägheitskräfte (Scheinkräfte) müssen zur Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten eingeführt werden, wenn diese Bewegungen in einem beschleunigten bewegten Bezugssystem dargestellt werden. Diese Trägheitskräfte spiegeln eigentlich nur die Beschleunigung des Bezugssystems wider. Sie treten nicht auf, wenn dieselben Vorgänge in einem Inertialsystem beschrieben werden.

Wir wollen uns dies an zwei Spezialfällen beschleunigt bewegter Bezugssystems klarmachen. Im ersten Fall ist die Bewegung geradlinig und gleichmäßig beschleunigt, im zweiten Fall rotiert das System (x‘,y‘,z‘) gegen (x,y,z) um den gemeinsamen Ursprung O = O‘ beider Systeme.

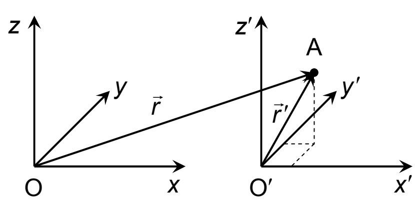
7.5.1 Geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

Bewegt sich der Ursprung O′ des Systems (x', y', z') gegenüber einem ruhenden System O entlang der x-Achse mit der zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit $\vec{u}(t)$, aber konstanter Beschleunigung

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mit } a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

so ändert sich nur der Betrag der Geschwindigkeit $\vec{u}$, jedoch nicht ihre Richtung.

Beispiel: Beobachter in einem auf gerader Strecke anfahrenden Zug.



System in Ruhe

beschleunigt bewegtes System

$$x = x' + v_{0,x} + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

Für einen Punkt A, der im System O′ die Koordinaten $\{x', y', z'\}$ hat, misst ein Beobachter im System O die Koordinaten $\left\{x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 + x', y = y', z = z'\right\}$, wenn zur Zeit $t = 0$ die beiden Koordinatenursprünge O und O′ zusammenfielen und die Anfangsgeschwindigkeit $v(t = 0) = v_0$ war. Die Geschwindigkeiten von A sind dann $\{v'_x, v'_y, v'_z\}$ für O′ und $\{v_x = v_0 + at + v'_x, v_y = v'_y, v_z = v'_z\}$ für O.

Beispiel: **Fahrstuhlexperiment**

In einem Fahrstuhl hängt eine Masse an einer Federwaage. Wenn sich der Fahrstuhl mit der Beschleunigung $\vec{a} = -a \cdot \vec{e}_z$ nach unten bewegt, misst die Federwaage die Kraft $\vec{F} = m \cdot (\vec{g} - \vec{a})$, bewegt er sich beschleunigt nach oben, so misst sie $\vec{F} = m \cdot (\vec{g} + \vec{a})$, wobei $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ die Erdbeschleunigung ist.

Der im Fahrstuhl sitzende Beobachter O‘ sagt:

Der Körper ist in Ruhe. Also muss die Gesamtkraft Null sein. Diese setzt sich zusammen aus

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

wobei $\vec{F}_1 = m \cdot \vec{g}$ (Gewichtskraft)

$\vec{F}_2 = -m \cdot (\vec{g} - \vec{a})$ (Gegenkraft der Federwaage)

$\vec{F}_3 = -m \cdot \vec{a}$ (Trägheitskraft)

$$\Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_i = 0$$

Der ruhende Beobachter O sagt:

Die Masse m wird zusammen mit dem Fahrstuhl beschleunigt. Dazu muss die Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ aufgewendet werden. Die Gesamtkraft

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \cdot \vec{g} - m \cdot (\vec{g} - \vec{a}) = m \cdot \vec{a}$$

ist die Vektorsumme aus Gewichtskraft $\vec{F}_1 = m \cdot \vec{g}$ und Rückstellkraft $\vec{F}_2 = -m \cdot (\vec{g} - \vec{a})$ der Feder.

Beim freien Fall des Fahrstuhls wird $\vec{a} = \vec{g}$. Für O′ bleibt $\sum \vec{F}_i = 0$, während für O die Gesamtkraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ wird.

Trägheitskräfte müssen nur eingeführt werden, wenn die Messungen in einem beschleunigten Bezugssystem durchgeführt werden und man dabei die Beschleunigung des Systems nicht berücksichtigt (Beobachter O‘).

Durch eine Transformation auf ein „Inertialsystem“ (= nicht beschleunigtes System) werden alle Scheinkräfte Null, d. h. der Beobachter O braucht sie nicht zur Beschreibung der Bewegung eines Körpers A in seinem „Inertialsystem“.

7.5.2 Gleichförmig rotierende Bezugssysteme

In rotierenden Bezugssystemen treten zusätzlich zu den realen physikalischen Kräften weitere Trägheits- oder Scheinkräfte auf, die der mitbewegte Beobachter benötigt, um die Beschleunigung eines Körpers erklären zu können: die Zentrifugal- und die Coriolis-Kraft.

Fallen die Nullpunkte O des ruhenden Systems und des mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierenden Systems S′ zusammen, dann sind die Abstände $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ vom Nullpunkt in beiden Koordinatensystemen gleich und zwischen der im ruhenden Koordinatensystem gemessenen Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}'$ des rotierenden Systems besteht der Zusammenhang

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Eine nochmalige Differentiation der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ergibt die Beschleunigung $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}}_{=0,\ \text{da}\ \omega=\text{const.}} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t}}_{\substack{= \\ \text{Geschwindigkeits-} \\ \text{änderung im} \\ \text{rotierenden System}}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\substack{= \\ \text{Drehbewegung} \\ \text{des} \\ \text{Koordinaten-} \\ \text{systems}}}$$

Der Beobachter in O erhält, in den Koordinaten von O′ ausgedrückt, für $\mathrm{d}\vec{v}'/\mathrm{d}t$ analog

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \vec{a}' + \left(\vec{\omega} \times \vec{v}'\right)$$

wobei $\vec{a}'$ wieder die Beschleunigung ist, die O′ relativ zu seinem System misst.

Man erhält daher

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}$$
$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{a}' + 2 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}$$

mit $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ ergibt sich

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{2 \cdot (\vec{v}' \times \vec{\omega})}_{=\text{Coriolis-beschleunigung}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})}_{=\text{Zentrifugal-beschleunigung}} = \vec{a} + \vec{a}_C + \vec{a}_{ZF}}$$

Während der Beobachter in O in seinem ruhenden System die Beschleunigung $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ misst, muss der Beobachter O′ in seinem rotierendem Bezugssystem für die gleiche Bewegung des Massenpunktes A zusätzliche Terme für die Beschleunigung einführen.

Da nach den Newton'schen Axiomen Beschleunigungen durch Kräfte verursacht werden, muss der Beobachter O′, wenn in seinem System die Gleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ gelten soll, zusätzlich Kräfte einführen, um die Bewegung des Massenpunktes A in seinem rotierenden Bezugssystem O′ zu beschreiben.

Dies sind:

Corioliskraft : $\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot (\vec{v}' \times \vec{\omega})$

und

Zentrifugalkraft : $\vec{F}_{ZF} = m \cdot (\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})) = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$

Beispiele:

- Zentrifugalkräfte: Schwerelosigkeit eines Astronauten
- Foucault‘sches Pendel (Drehung der Schwingungsebene)

- Ein besonders imposantes Beispiel für die Corioliskräfte bieten die sich bei Tiefdruckgebieten bildenden Wolkenformationen. Der Wind strömt (in unserem rotierenden Erdsystem beobachtet!) nicht radial zum Punkt des tiefsten Druckes, sondern er wird tangential abgelenkt und spiralt daher auf der Nordhalbkugel im Gegenuhrzeigersinn, auf der Südhalbkugel im Uhrzeigersinn in das Tief hinein.