10 Schwingungen

10.1 Ungedämpfte harmonische Schwingungen

Eine Vielzahl physikalischer Phänomene spielt sich in periodisch wiederkehrenden Schritten ab.

- Kind auf einer Schaukel
- Ebbe und Flut
- Tag und Nacht
- Schwingungen von Uhrenpendel – Unruhen
- Schwingungen der Luft – Schall, Ultraschall
- Gitterschwingungen von Atomen und Molekülen
- Schwingungen von Elektronen innerhalb des Atomes

Wichtig für die Elektrotechnik:

- elektrische Schwingkreise, die ein sogenanntes Resonanzverhalten aufweisen
- Seiten des Klaviers

In der Mechanik:

> Schwingungen sind periodische, d. h. in gleichen Zeiten sich wiederkehrende Bewegungen von Körpern oder Massenpunkten um eine Ruhe- oder Gleichgewichtslage.

Grundbegriffe und Definitionen

Betrachten wir zum Beispiel eine Masse *m*, die an einer Feder befestigt ist, die wiederum an der Wand angebracht ist. Die Masse *m* schwingt dabei auf einer reibungsfreien Unterlage.

$y = 0$ … Ruhelage (Gleichgewichtslage)
$y = \hat{y}$ … maximale Auslenkung = Amplitude
$y(t)$ … momentane Auslenkung = Elongation
T … Schwingungsdauer/Periode (Dauer einer ganzen Schwingung)
f, ν … Schwingungszahl, Frequenz (Anzahl der Schwingungen pro Sek.)
φ, α … Phasenwinkel

Phase:

Momentaner Schwingungszustand einer Schwingung, festgelegt durch Auslenkung und Geschwindigkeitsrichtung

Bei sinusförmigen Schwingungen wird die Phase φ im Bogenmaß angegeben.

Wir wollen jetzt das Schwingungsproblem unseres Masse-Feder-Systems genauer betrachten und in eine mathematische Form bringen. Dazu müssen wir im Wesentlichen die sogenannte „Bewegungsgleichung" aufstellen und anschließend lösen. Die Bewegungsgleichung erhalten wir aus den Kraftgesetzen und den Newton'schen Axiomen.

a) Für das Masse-Feder-System gilt das „Hooke'sche Gesetz":

$$\vec{F} = -k \cdot (\vec{x} - \vec{x}_G)$$

k = Federkonstante
$\vec{x}_G$ = Gleichgewichtslage

Um die Sache etwas leichter zu machen, erkennen wir an, dass es eigentlich egal ist, wie groß $\vec{x}_G$ ist; es kommt nur auf die Abweichung von $\vec{x}_G$ an und nicht auf den Absolutwert. Wir können also auch $\vec{x}_G = 0$ setzen.

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

Nach dem 2. Newton'schen Axiom gilt $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}$.

Das heißt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -k \cdot \vec{x}$$

mit $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{x}}$ und $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{x}}$

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = -k \cdot \vec{x}$$

oder

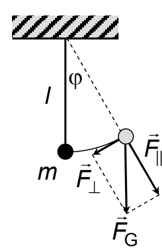
$$\boxed{\ddot{\vec{x}} + \frac{k}{m} \cdot \vec{x} = 0}$$

Bewegungsgleichung des Feder-Masse-Systems

b) Pendel der Länge l, das im Gravitationsfeld der Erde hin und her schwingt:

Im Gleichgewichtszustand ist der Winkel $\varphi = 0$. Für von Null verschiedene φ wirkt eine rücktreibende Kraft auf die Masse. Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ wirkt auch beim ausgelenkten Pendel genau senkrecht nach unten. Bezüglich des Fadens ist die angreifende Kraft zerlegbar in eine Komponente $\vec{F}_{||}$, die in Fadenrichtung gerichtet ist, und eine Komponente $\vec{F}_\perp$, die senkrecht dazu wirkt.

Die rücktreibende Kraft ist also $\vec{F}_\perp$:



$$\left|\vec{F}_\perp\right| = \sin\varphi \cdot \left|\vec{F}_G\right| \quad \text{oder} \quad \frac{\left|\vec{F}_\perp\right|}{\left|\vec{F}_G\right|} = \sin\varphi$$

Für die parallele Komponente gilt:

$$\left|\vec{F}_{||}\right| = \cos\varphi \cdot \left|\vec{F}_G\right|$$

Nach dem 2. Newton'schen Axiom ist dann:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi \quad \text{oder} \quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -g \cdot \sin\varphi$$

Jetzt gilt für die Länge des Weges x, den die Masse zurücklegt:

$$x = l \cdot \varphi$$

Damit wird:

$$\ddot{x} = l \cdot \ddot{\varphi} = -g \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\varphi$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0$$ (mathematisch schwierig lösbar)

Mit $\sin\varphi \approx \varphi$ (für kleine Winkel):

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0}$$

Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

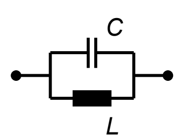
Bemerkungen:

- Bewegungsgleichung sieht analog zum Masse-Feder-System aus
  $\Rightarrow$ gleiche Gleichung hat gleiche Lösung zur Folge
- Für das mathematische Pendel gilt die Bewegungsgleichung nur für kleine Auslenkungen.
- Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels ist von der Masse des Objektes unabhängig (z. B. Vater und Kind auf der Schaukel sind gleich schnell).

c) Weitere Bewegungsgleichung desselben Typs: „**der elektr. Schwingkreis**“

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung benötigen wir nur die Tatsache, dass die angelegte Spannung U für den Kondensator und die Spule gleich ist.

Die Spannung U an einem Kondensator ist



$$U = \frac{Q}{C}$$

Q = Ladungsmenge
C = Kapazität

An der Spule ist die Spannung

$$U = -L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

L	=	Induktivität der Spule
$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$	=	Änderung des Stroms mit der Zeit

Werden die Spule und der Kondensator parallel, d. h. zu einem Schwingkreis geschaltet, herrscht die gleiche Spannung an den beiden Polen.

$$\frac{Q}{C} = -L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Da Strom gleich Ladung pro Zeit ist (d. h. $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$), erhalten wir:

$$\frac{Q}{C} = -L \cdot \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t} = -L \cdot \ddot{Q}$$

oder

$$\boxed{\ddot{Q} + \frac{1}{LC} \cdot Q = 0}$$

Bewegungsgleichung des elektrischen *LC*-Schwingkreises

Lösung dieser Bewegungsgleichungen (am Fall Feder-Masse-System)

Da die Bewegungen periodisch sind, müssen wir zur Lösung offensichtlich eine periodische Funktion ansetzen, z. B. einen Sinus oder einen Kosinus.

Ein Lösungsansatz ist

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

$\vec{x}_0$	=	Amplitude
α	=	Phasenwinkel, der die Auslenkung zur Zeit $t = 0$ bestimmt
ω	=	Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi/T$)

Es ist also zur Zeit $t = 0$

$$\vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0 \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

Einfachheitshalber betrachten wir jetzt nur eine Komponente, d. h. $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\cdot x=0$$

Durch Einsetzen des Ansatzes $x=x_0\cdot\sin(\omega t+\alpha)$ in die Bewegungsgleichung, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}[x_0\cdot\sin(\omega t+\alpha)]+\frac{k}{m}\cdot[x_0\cdot\sin(\omega t+\alpha)]&=0\\ \omega\cdot\frac{d}{dt}[\cos(\omega t+\alpha)]+\frac{k}{m}\cdot\sin(\omega t+\alpha)&=0\\ -\omega^2\cdot\sin(\omega t+\alpha)+\frac{k}{m}\cdot\sin(\omega t+\alpha)&=0\\ -\omega^2+\frac{k}{m}&=0\\ \boxed{\omega^2=\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

Wir haben hergeleitet, dass für den speziellen Fall $\omega^2=\frac{k}{m}$, unser Ansatz eine Lösung hat. Wir nennen die Lösung ω_0.

$$\boxed{\omega_0^2=\frac{k}{m}\quad\text{oder}\quad\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$ **Eigenlösung**

Es gibt noch eine Funktion, die uns eine Lösung gegeben hätte, und zwar ist dies

$$x(t)=x_0\cdot e^{j(\omega t+\alpha)}$$

wobei $j=\sqrt{-1}$ ist, also eine sogenannte imaginäre Zahl. Wir überprüfen zunächst, ob dies tatsächlich eine Lösung ist. Einsetzen in die Bewegungsgleichung und kürzen mit x_0 ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left[e^{j(\omega t+\alpha)}\right]+\frac{k}{m}\cdot e^{j(\omega t+\alpha)}&=0\\ j\omega\cdot\frac{d}{dt}\left[e^{j(\omega t+\alpha)}\right]+\frac{k}{m}\cdot\left[e^{j(\omega t+\alpha)}\right]&=0\\ \underbrace{j^2}_{=-1}\omega^2\cdot e^{j(\omega t+\alpha)}+\frac{k}{m}\cdot e^{j(\omega t+\alpha)}&=0\\ -\omega^2+\frac{k}{m}&=0\end{aligned}$$

Mit $\omega = \omega_0$ $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$

damit die Gleichung für alle *t* und α erfüllt ist.

Erinnerung an die komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl besteht aus zwei Teilen, Real- und Imaginärteil.

$$\hat{z} = x + \mathrm{j}y$$
$$\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = x$$
$$\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = y$$

Man addiert zwei komplexe Zahlen, indem man die Real- und Imaginärteil getrennt addiert und so einen neuen Real- und Imaginärteil erhält.

$$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = x_1 + \mathrm{j}y_1 + x_2 + \mathrm{j}y_2 = x_1 + x_2 + \mathrm{j}(y_1 + y_2)$$
$$\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = x_1 + x_2$$
$$\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = y_1 + y_2$$

Multipliziert man zwei komplexe Zahlen, erhält man

$$\hat{z} = \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = (x_1 + \mathrm{j}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{j}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{j}(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = x_1x_2 - y_1y_2$$
$$\mathrm{Im}\{\hat{z}\} = x_1y_2 + x_2y_1$$

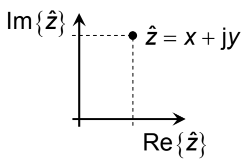
Besonders interessant ist folgender Zusammenhang, der von Euler aufgestellt wurde und der für die komplexe e-Funktion gilt.

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

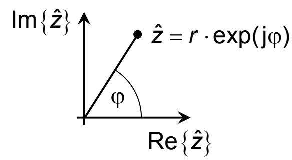
$$\mathrm{Re}\left\{e^{jx}\right\} = \cos x$$

$$\mathrm{Im}\left\{e^{jx}\right\} = \sin y$$

Am besten ist es vielleicht, sich folgende graphische Darstellung der komplexen Zahlen zu merken: In einem rechtwinkligen Koordinatensystem stellt die komplexe Zahl $\hat{z}$ einen Punkt dar. Die x-Koordinate ist der Realteil von $\hat{z}$, die y-Koordinate der Imaginärteil, so dass die komplexe Zahl ähnlich wie ein Vektor dargestellt ist.



kartesisches Koordinatensystem



Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

und umgekehrt

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

Damit sind die Ausdrücke $z = x + jy$ und $z = r \cdot \exp(j\varphi)$ mit $j = \sqrt{-1}$ äquivalent.

Kommen wir noch einmal auf das Masse-Feder-Problem zurück und setzen konkrete Anfangsbedingungen ein.

Zur Zeit $t = 0$ sei die Auslenkung $\alpha = A$ und habe die Geschwindigkeit $v(t{=}0) = 0$.

Unsere Sinuslösung muss also noch diese zwei weiteren Bedingungen erfüllen:

$$x(t = 0) = A \quad \text{d. h. } x_0 \cdot \sin\alpha = A$$

und

$$v = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{d. h. } x_0 \cdot \omega_0 \cdot \cos\alpha = 0$$

aus der zweiten Bedingung folgt, dass $\alpha = \pi/2$ sein muss, denn α_0 oder $\omega_0 = 0$ ergibt nicht mehr unsere schwingende Masse. Damit ergibt die erste Bedingung sofort, dass $x_0 = A$ sein muss.

Die vollständige Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung heißt:

$$\boxed{x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \pi/2)}$$

oder

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)}$$

Für das Masse-Feder-System war

$$\boxed{\omega_{0_{MF}} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ **Eigenschwingung des Masse-Feder-Systems**

Aus Analogiegründen erhalten wir für das Pendel

$$\boxed{\omega_{0_P} = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$ **Eigenschwingung des Pendels**

und für den elektrischen Schwingkreis

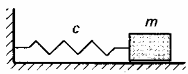
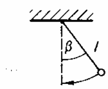
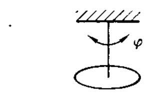
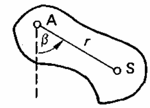
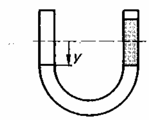
$$\boxed{\omega_{0_{LC}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$ **Eigenschwingung des elektrischen Schwingkreis**

Wir fassen das Lösungsschema für Schwingungsprobleme noch einmal zusammen:

i) Bewegungsgleichung aufstellen (hier steckt die Physik)
ii) Lösen von i) (hier steckt die Mathematik)
iii) Anfangsbedingungen einsetzen (hier steckt die Detailarbeit)

10.1 Ungedämpfte harmonische Schwingungen

Mechanische Schwingungssysteme mit ihren Differentialgleichungen und Eigenschwingungen ω_0

Schwingungssystem	Kraftansatz Differentialgleichung	ω_0
Federpendel 	$F = ma$ $-cy = m\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0$	$\sqrt{\frac{c}{m}}$
mathematisches Pendel 	$F = ma$ $-mg\beta = ml\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
Torsionspendel 	$M = J_A a$ $-c^*\beta = J_A\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{c^*}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{c^*}{J_A}}$
physikalisches Pendel 	$M = J_A a$ $-mgr\beta = J_A\ddot{\beta}$ $\ddot{\beta} + \frac{mgr}{J_A}\beta = 0$	$\sqrt{\frac{mgr}{J_A}}$
Flüssigkeitspendel 	$F = ma$ $-2Agy = m_{ges}\ddot{y}$ $\ddot{y} + \frac{2A\rho g}{m_{ges}} y = 0$ $\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0$	$\sqrt{\frac{2A\rho g}{m_{ges}}}$ $\sqrt{\frac{2g}{l}}$

10.2 Gedämpfte Schwingungen

In tatsächlich vorkommenden Schwingungsprozessen hat man natürlich immer auftretende **Reibungskäfte**. Die Reibungskräfte sind häufig proportional zur Geschwindigkeit eines Körpers (Stoke'sche Reibung, d. h. $\vec{F}_R \sim \vec{v}$). Wir nennen die Proportionalitätskonstante r :

$$\vec{F}_R = -r \cdot \dot{\vec{x}}$$

wobei die Kraft der Bewegungsrichtung entgegenwirkt.

Aus dem 2. Newton‘schen Axiom wird damit z. B. für das Feder-Masse-System:

$$\vec{F}_{Feder} + \vec{F}_R = \vec{F}_{Ges}$$
$$-k \cdot \vec{x} - r \cdot \dot{\vec{x}} = m \cdot \ddot{\vec{x}}$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{x}} + \frac{r}{m} \cdot \dot{\vec{x}} + \frac{k}{m} \cdot \vec{x} = 0$$

Mit den Abkürzungen

$$\beta := \frac{r}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

erhalten wir unsere neue Bewegungsgleichung (für eine Koordinate)

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0}$$

Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

Diese Gleichung muss jetzt gelöst werden.

Dazu verwenden wir unseren Ansatz mit e-Funktion mit komplexem Argument:

$$\hat{x}(t) = x_0 \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert:

$$x_0 \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} \cdot \left[-\omega^2 + 2j\beta\omega + \omega_0^2\right] = 0$$

Damit die Gleichung für alle x_0, ω und α erfüllt ist, muss der Ausdruck in der Klammer Null sein.

$$-\omega^2 + 2j\beta\omega + \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_{1,2} = j\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Setzen wir dies in unseren Ansatz ein, so erhalten wir

$$\hat{x}(t) = x_0 \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} = x_0 \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\left[j\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right] \cdot t}$$

$$= x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + j\alpha} = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \exp\left[j\left(\pm\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \alpha\right)\right]$$

Mit der Eulerschen Formel ergibt sich

$$\hat{x}(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \left[\cos(\pm\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \alpha) + j \cdot \sin(\pm\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \alpha)\right]$$

Als Lösung nehmen wir nur den Realteil und erhalten

$$\boxed{\mathrm{Re}\{\hat{x}(t)\} = x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\pm\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \alpha)}$$

allgemeine Lösung

Würden wir den Imaginärteil verwenden, dann würden wir als Lösung

$$\mathrm{Im}\{\hat{x}(t)\} = x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\pm\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \alpha)$$

erhalten, d. h. sie wäre nur um 90° phasenverschoben. Da wir aber α erst durch die Anfangsbedingungen festlegen, spielt es noch keine Rolle.

Was bedeuten diese Lösungen?

1. Fall: $\beta < \omega_0$ (Schwingfall)

Ist $\beta \ll \omega_0$, dann reduziert sich das Argument des Kosinuses auf $\omega_0 t$, das Ergebnis der ungedämpften Schwingung. Ferner ist die exp-Funktion wenig abschwächend.

Für $\beta \to \omega_0$: offensichtlich wird die Frequenz ω_d, mit der unser System schwingt

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

immer kleiner als die des ungedämpften, d. h. $\omega_d \to 0$ für $\beta \to \infty$

2. Fall: $\beta = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall)

Damit wird $\omega_d = 0$.

Für diesen Spezialfall benötigen wir zur Lösung der Bewegungsgleichung (d. h. $\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$) noch eine zweite, linear unabhängige Lösung

$$x(t) = x_2 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

Die vollständige Lösung ist im Falle $\omega_0^2 = \beta^2$ also:

$$x(t) = x_1 \cdot e^{-\beta t} + x_2 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$
$$x(t) = (x_1 + x_2 \cdot t) \cdot e^{-\beta t}$$

Für $\omega_0^2 = \beta^2$ wird die ausgelenkte Masse in die Gleichgewichtsposition zurückfahren, ohne über sie hinauszuschießen und zu schwingen.

$\Rightarrow$ Auslenkung geht hier schnellstmöglich wieder auf Null zurück.

Gewünschter Fall z. B. bei

a) Auto – Stoßdämpfer
b) Zeigerinstrument
c) Erdbebendämpfungen
d) …

3. Fall: $\beta > \omega_0$ (Kriechfall)

In diesem Fall wird $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$ und damit $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ imaginär. Dies bedeutet, wir haben keine Oszillation mehr, sondern die Masse kriecht lediglich noch langsamer in die Gleichgewichtslage zurück. Die Lösung im Kriechfall ist wieder durch zwei Wurzeln mit verschiedenen Vorzeichen gegeben.

Bemerkung: $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = j\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$$x(t) = x_3 \cdot e^{-\left[\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right] \cdot t} + x_4 \cdot e^{-\left[\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right] \cdot t}$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = A$ und $\alpha = \alpha$ erhalten wir für

a) $\beta < \omega_0$:

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{\cos\alpha} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \alpha\right]} \qquad \text{mit } \tan\alpha = \frac{-1}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1}}$$

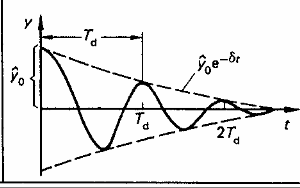
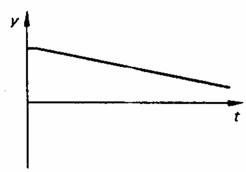
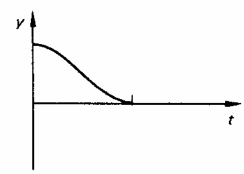
b) $\beta = \omega_0$:

$$\boxed{x(t) = A \cdot (1 + \beta t) \cdot e^{-\beta t}}$$

c) $\beta > \omega_0$:

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{-\beta t} \cdot \left[(1 - 1/D) \cdot e^{-\beta D t} + (1 + 1/D) \cdot e^{+\beta D t}\right]} \qquad \text{mit } D = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{k^2}}$$

Lösungen der drei Fälle bei gedämpften Systemen

	Schwingfall	Kriechfall	aperiodischer Grenzfall
Bedingung	$D < 1$ $\omega_0 > \delta$	$D > 1$ $\omega_0 < \delta$	$D = 1$ $\omega_0 = \delta$
Lösung	$\boxed{y(t) = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)}$ $\omega_d = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ $\omega_d < \omega_0$	$y(t) = \hat{y}_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + \hat{y}_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$ $y(t) = \hat{y}_1 e^{-\omega_0 (D - \sqrt{D^2 - 1})t} + \hat{y}_2 e^{-\omega_0 (D + \sqrt{D^2 - 1})t}$ ω_d imaginär	$\boxed{y(t) = (\hat{y}_1 + \hat{y}_2 t) e^{-\delta t}}$ $y(t) = (\hat{y}_1 + \hat{y}_2 t) e^{-\omega_0 D t}$ $\omega_d = 0$
Graph der Funktion			

Charakteristische Kenngrößen mechanischer und elektromagnetischer Schwingkreise mit Dämpfung

mechanisch	**elektromagnetisch**
Masse m Dämpfungskonstante b Federkonstante c	Induktivität der Spule L Widerstand R Kehrwert der Kapazität $\frac{1}{C}$
Kreisfrequenz ω_0	
$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
Abklingkoeffizient δ	
$\delta = \frac{b}{2m}$	$\delta = \frac{R}{2L}$

Dämpfungsgrad D	
$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{1}{mc}}$	$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$
Güte Q	
$Q = \frac{1}{2D} = \frac{\sqrt{mc}}{b}$	$Q = \frac{1}{2D} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Was passiert, wenn man ein schwingungsfähiges System kontinuierlich anregt?

Beispiele:

- Vater stoßt Kind auf der Schaukel immer weiter an
- Hängebrücke in den U.S.A. – durch periodische Windböen
- Sendefrequenz beim elektrischen Schwingkreis

Unsere Kraftausgangsgleichung wird:

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} + r \cdot \dot{\vec{x}} + k \cdot \vec{x} = \vec{F}_\mathrm{E}$$

Die Erregerkraft ist $\vec{F}_\mathrm{E}$, und wir wollen anerkennen, dass sie harmonisch ist (d. h. periodisch)

$$\vec{F}_\mathrm{E} = \vec{F}_0 \cdot \cos(\omega_\mathrm{E} \cdot t)$$

wobei $\vec{F}_0$ die Amplitude der Kraft ist. Wie üblich betrachten wir nur eine Koordinate, nämlich x. Teilen wir durch m und kürzen mit $a_0 = F_0/m$ erhalten wir:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = a_0 \cdot \cos(\omega_\mathrm{E} \cdot t)}$$

Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung mit periodischer Anregung

mit den Parameter $\beta = \dfrac{r}{2m}$ und $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Für die Lösung erweist es sich wieder als vorteilhaft, in den imaginären Raum (komplexen Raum) zu gehen. Dazu addieren wir der anregenden Kraft einen Imaginärteil und erhalten:

$$\boxed{\ddot{\hat{x}} + 2\beta \cdot \dot{\hat{x}} + \omega_0^2 \cdot \hat{x} = a_0 \cdot [\cos(\omega_\mathrm{E} \cdot t) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega_\mathrm{E} \cdot t)] = a_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{E} t}}$$

komplexe Bewegungsgleichung

Wir setzen jetzt unsere komplexe Lösung an:

$$\hat{x} = \hat{x}_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_\mathrm{E} t + \alpha)}$$

Einsetzen liefert:

$$(-\omega_E^2 + 2j\beta\omega_E + \omega_0^2)\cdot \hat{x}_0 \cdot e^{j(\omega_E t+\alpha)} = a_0 \cdot e^{j(\omega_E t+\alpha)}$$

Daraus folgt für $\hat{x}_0$, damit es für alle ω_E und α gültig ist:

$$\boxed{\hat{x}_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega_E^2 + 2j\beta\omega_E}}$$

Bei dieser Darstellung haben wir aber im Nenner eine komplexe Zahl. Um dies zu vermeiden, multiplizieren wir die Zahl im Nenner und im Zähler mit der konjugiert komplexen Zahl (d. h. $z_1 = a + jb \Rightarrow z_1^* = a - jb$).

$$\begin{aligned}\hat{x}_0 &= \frac{a_0}{(\omega_0^2 - \omega_E^2) + j\cdot 2\beta\omega_E}\cdot\frac{(\omega_0^2 - \omega_E^2) - j\cdot 2\beta\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2) - j\cdot 2\beta\omega_E}\\ &= \frac{a_0}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2}\cdot\left[(\omega_0^2 - \omega_E^2) - j\cdot 2\beta\omega_E\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_0 &= \frac{a_0}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2}\cdot\left[(\omega_0^2 - \omega_E^2) - j\cdot 2\beta\omega_E\right]\\ &= \underbrace{\frac{a_0\cdot(\omega_0^2 - \omega_E^2)}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2}}_{\text{Realteil}} - j\cdot\underbrace{\frac{a_0\cdot 2\beta\omega_E}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2}}_{\text{Imaginärteil}}\\ &= |\hat{x}_0|\cdot e^{j\varphi}\end{aligned}$$

Wir müssen jetzt nur noch die Auslenkungsamplitude finden, also in der Darstellung $\hat{x}_0 = |\hat{x}_0|\cdot e^{j\varphi}$ suchen wir $|\hat{x}_0|$.

$$\begin{aligned}|\hat{x}_0| &= \sqrt{\hat{x}_0\cdot\hat{x}_0^*} = \sqrt{(\mathrm{Re}\{\hat{x}_0\})^2 + (\mathrm{Im}\{\hat{x}_0\})^2}\\ &= \sqrt{\frac{a_0^2\cdot(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + a_0^2\cdot(2\beta\omega_E)^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2\right]^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2}}\end{aligned}$$

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\{\hat{x}_0\}}{\mathrm{Re}\{\hat{x}_0\}} = \frac{-2\beta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \quad \text{oder} \quad \varphi = \arctan\left\{\frac{-2\beta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}\right\}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\hat{x}\} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2}} \cdot \cos\left[\omega_E t + \arctan\left\{\frac{-2\beta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}\right\}\right]$$

Lösung der Bewegungsgleichung einer erzwungenen Schwingung

Aus obiger Lösung sehen wir, dass es keine besondere Bedingungen für die Frequenzen gibt, mit der ein angeregtes System schwingt.

$\Rightarrow$

a) Es ist immer die Erregerfrequenz ω_E selbst, mit der ein angeregtes System schwingt.

b) Sowohl die Amplitude als auch der Winkel α, den wir Nacheilwinkel nennen, hängen von der Erregerfrequenz ab.

Sind wir z. B. in der Nähe von ω_0 (Eigenfrequenz des Systems), dann wird die Auslenkamplitude A

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\beta\omega_E)^2}} \underset{\omega_E \to \omega_0}{\rightarrow} \frac{a_0}{2\beta\omega_E} = \frac{F_0}{r \cdot \omega_E}$$

Das heißt, wenn die Dämpfung r gegen Null geht, steigt die Schwingungs-amplitude ins Unendliche.

$\Rightarrow$ **Resonanzkatastrophe**

Die genaue maximale Amplitude, d. h. Resonanz, ergibt sich bei der Frequenz ω_E, bei der der Nenner am kleinsten ist, d. h. wo die Ableitung des Nenners nach ω_E Null wird.

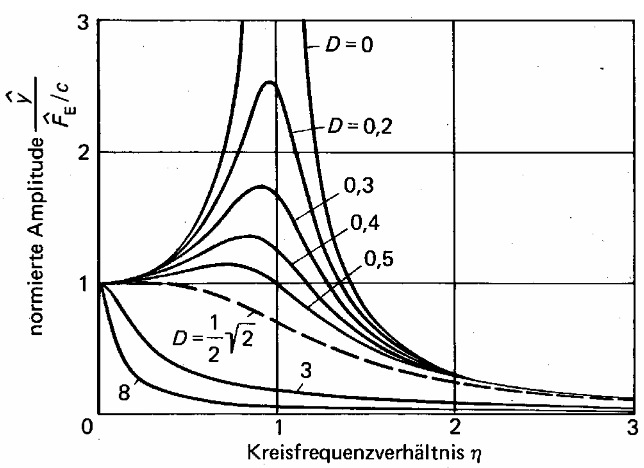
$$\frac{d}{d\omega_E}\left[(\omega_0^2-\omega_E^2)^2+(2\beta\omega_E)^2\right]=0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\omega_E=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

Bei schwacher Dämpfung ist die Resonanzfrequenz tatsächlich in der Nähe von ω_0.

Amplitudenresonanzfunktion



Für den Nacheilwinkel α (Winkel, den die Auslenkung der Anregung nacheilt) gilt im Resonanzfall:

$$\tan\alpha = \frac{-2\beta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \overset{\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{=} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}$$

Für schwache Dämpfung ($\beta \to 0$) geht $\tan\alpha \to -\infty$, damit ist $\alpha = -\pi/2$.

Das bedeutet, dass die Auslenkung im schwach gedämpften Resonanzfall der Erregung um einen Winkel von $\pi/2$ also 90° nacheilt.

Das Phänomen der Überlagerung (= „Superposition“) zweier Schwingungen tritt z. B. beim Stimmen einer Gitarre auf. Für eine Beschreibung dieser Überlagerung addieren wir einfach zwei Schwingungen.

$$x_1(t) = a \cdot \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2(t) = b \cdot \cos(\omega_2 t)$$

Die Addition ergibt:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a \cdot \cos(\omega_1 t) + b \cdot \cos(\omega_2 t)$$

Für den Fall $a = b$:

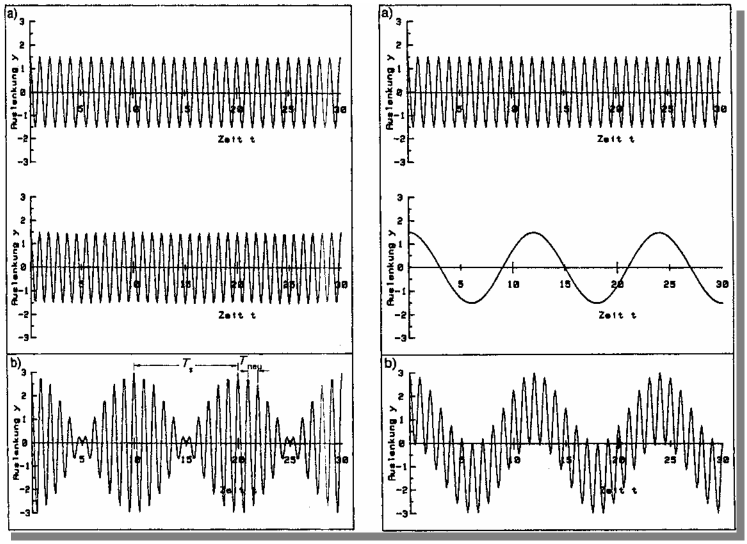
$$\boxed{x(t) = a \cdot [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] = a \cdot 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)\right]}$$

Damit ist eine Überlagerung zweier Schwingungen das gleiche wie das Produkt zweier Funktionen mit der Durchschnittsfrequenz und der halben Differenzfrequenz.

Schwebungsdauer: $T_S = \dfrac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$

10.5 Überlagerte Schwingungen

Schwebungen (links) und Schwingungsüberlagerungen bei großen Frequenzunterschieden (rechts)



10.6 Fourieranalyse

Ist unser Ansatz einer periodischen, harmonisch angeregten Kraft mit

$$\vec{F}_E = \vec{F}_0 \cdot \cos(\omega_E \cdot t)$$

nicht vielleicht eine zu spezielle Funktion, die bei reellen Problemen nicht vorkommt?

FOURIER hat bewiesen, dass jede Funktion (Sinus, Dreieck, Rechteck, …) sich als Summe aus Kosinus- und Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen darstellen lässt.

⇒ Wir können durch Überlagerung verschiedener Kosinusfunktionen beliebige periodische Anziehungskräfte darstellen.

In der Formel sieht die allgemeine Fourierreihe zur Darstellung einer periodischen Funktion *f*(*t*) mit der Periode *T* so aus:

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t) \\ &+ a_2 \cdot \cos(2\omega t) + b_2 \cdot \sin(2\omega t) \\ &+ a_3 \cdot \cos(3\omega t) + b_3 \cdot \sin(3\omega t) \\ &+ a_4 \cdot \ldots \end{aligned}$$

oder kompakter

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t) \right]$$

Die Koeffizienten a_n, b_n können für jedes n verschieden sein, sie gewichten die auftretenden Frequenzen. $\Rightarrow$ Amplitudenspektrum

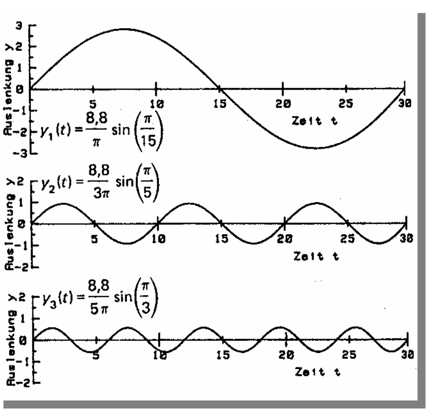
$\Rightarrow$ **Spektralanalyse periodischer Funktionen**

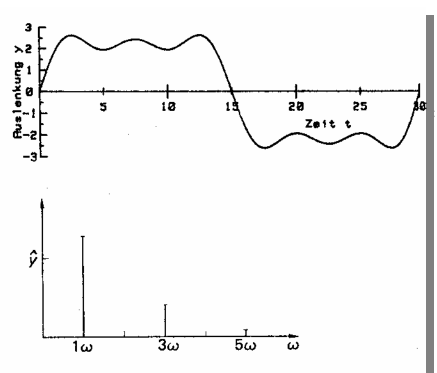
Die Koeffizienten a_n, b_n berechnet man für eine konkrete Fkt. folgendermaßen:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Überlagerung dreier Schwingungen und Amplitudenspektrum nach der Fourier-Analyse





Fourier-Analyse des Spannungsverlaufs bei einem Kommutierungskondensator