

Quantumtransport in niedrigdimensionalen HL

Ermöglicht die Untersuchung außergewöhnlicher Eigenschaften wie:

- a) Shubnikov-de Haas (SdH) Effekt
- b) Quantum Hall Effekt (QHE)
- c) fraktionalen QHE
- d) Ballistischen Transport

Die Untersuchung eines 2-dim Systems in einem senkrecht dazu stehenden Magnetfeld ermöglicht die Quantisierung des Hall-Widerstands, der aus der Quantisierung der Energie in eine Reihe von Landau Niveaus. Die Landau **magnetische Länge** l_H (auch bekannt als der Zyklotronradius des untersten Landau Energieniveaus) übernimmt die Rolle einer Wellenlänge im QHE und ist gegeben durch.

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

Für $B = 10 \text{ T}$ ist die magnetische Länge $l_H \sim 8.12 \text{ nm}$

Großer gyromagnetischer **g^* Faktor** aufgrund der Spinaufspaltung

$$g^* = 2 \left[1 - \left\{ \frac{1-x}{2+x} \right\} \left\{ \frac{1-y}{y} \right\} \right],$$

$$x = 1/(1 + \Delta/E_g)$$

$$y = m^*/m_0,$$

InAs $g^* = -7,6$

GaAs $g^* = -0.2$

Shubnikov-de Haas Oszillationen

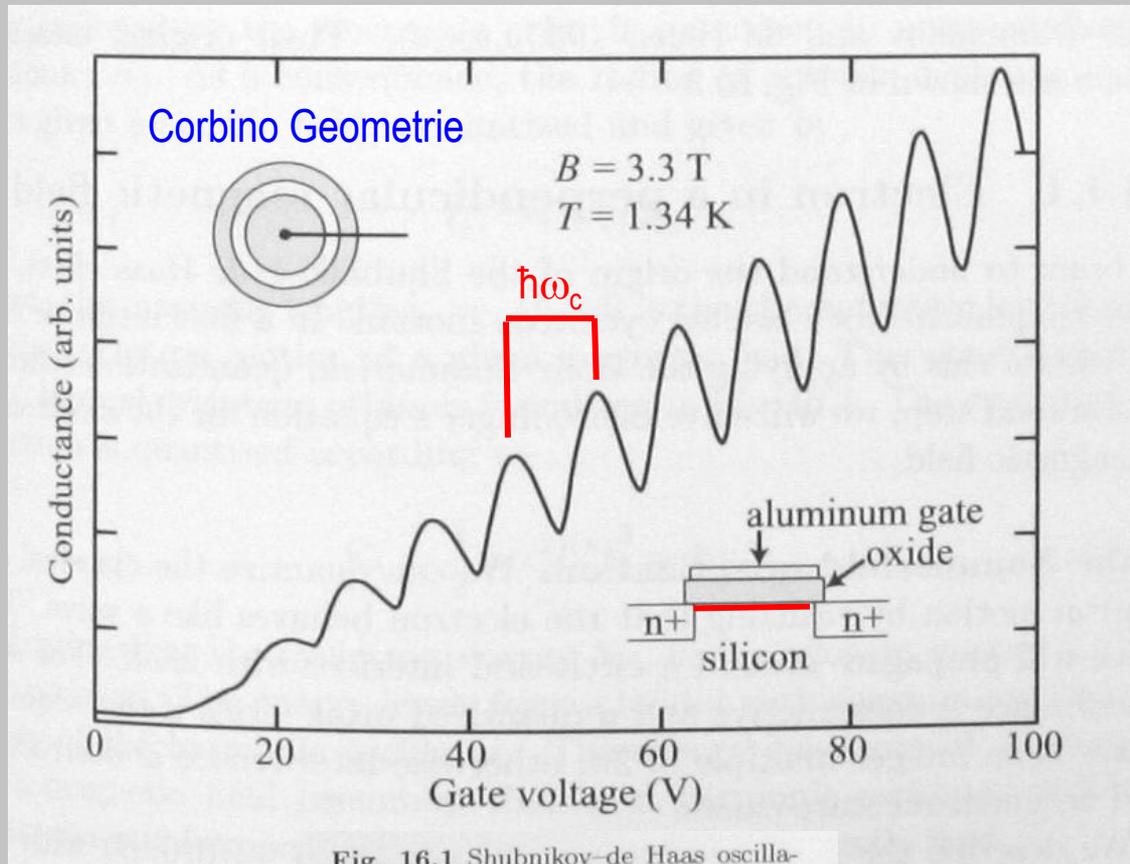


Fig. 16.1 Shubnikov-de Haas oscillations in σ_{xx} , measured on a Si MOS structure in Corbino geometry at a temperature of 1.34 K and in a magnetic field of 3.3 T. (Reprinted with permission from Fowler *et al.*, 1966. Copyright 1966 by the American Physical Society.)

Bohr-Sommerfeld Quantisation (Elektronen im senkrechten Magnetfeld)

Wir können die klassische Zyklotronbewegung quantisieren, wenn wir die Wellennatur des Elektrons berücksichtigen. Die Elektronenwelle bewegt sich dabei auf einen Kreis und interferiert mit sich selbst. Die Selbstinterferenz ist konstruktiv wenn die Phase ein ganzzahliges Vielfache von 2π ist.

Annahme: B-Feld nur in z-Richtung

Zyklotronradius: $R_c = v/\omega_c = mv/eB.$

Mit Hilfe der De Broglie Beziehung $m\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k},$

können wir den Zyklotronradius jetzt folgendermassen ausdrücken $R_c = \hbar k/eB.$

Wie beim klassischen Impuls, erfordert die Quantumphase für das Elektron während einer vollständigen Umdrehung der Länge $2\pi R_c$ entlang des Zyklotronorbits zwei Teile. Der erste ist die **dynamische Phase**

$$\Delta\varphi_d = 2\pi k R_c = 4\pi \frac{\phi}{\phi_0},$$

Wo wir den magnetischen Fluss durch die Fläche πR_c^2 des zirkularen Orbits, der durch $\phi = B\pi R_c^2,$ und dem magnetischen Fluß-quantum $\phi_0 = h/e.$ gegeben ist.

Der zweite Term ist die **Aharonov-Bohm Phase**:

$$\Delta\varphi_{AB} = -\frac{|e|}{\hbar} \oint \mathbf{A} ds = -\frac{|e|}{\hbar} \frac{BR_c}{2} 2\pi R_c = -2\pi \frac{\phi}{\phi_0}.$$

Bohr-Sommerfeld Quantisation (Elektronen im senkrechten Magnetfeld)

Dieser Term - die **Aharonov-Bohm Phase** - ist bestimmt durch das Vektorpotential $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ entlang des zirkularen Weges den das Elektron nimmt und ist gegeben durch.

$$\Delta\varphi_{AB} = -\frac{|e|\hbar}{\hbar} \oint \mathbf{A} ds = -\frac{|e|\hbar}{\hbar} \frac{BR_c}{2} 2\pi R_c = -2\pi \frac{\phi}{\phi_0}.$$

Die Bohr-Sommerfeld Quantization führt deshalb zu der Bedingung

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_d + \Delta\varphi_{AB} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} = 2\pi n,$$

Diese Bedingung manifestiert, dass der vom Elektronenorbit eingeschlossene magnetische Fluss quantisiert ist in Einheiten des Flussquants $\phi_0 = h/e$. Als Konsequenz ist der Radius möglicher Zyklotronorbits quantisiert und durch

$$l_c^{(n)} = \sqrt{2nl_c},$$

gegeben, wobei die magnetische Länge $l_c = \sqrt{\hbar/eB}$ ist.

Die Energie der Elektronen ist quantisiert entsprechend

$$E_n = \frac{1}{2} m \omega_c^2 l_c^{(n)2} = \hbar \omega_c n,$$

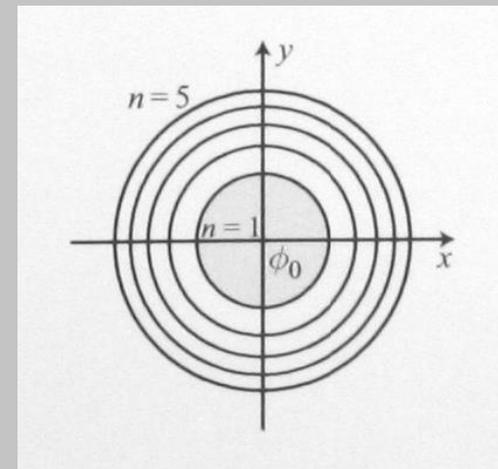


Fig. 16.4 Quantized cyclotron orbits in real space. The smallest orbit encloses one single flux quantum ϕ_0 .

Lösung der Schrödinger Gleichung

Der Hamiltonfunktion für parabolische Bänder

$$H = \frac{(\mathbf{p} + |e|\mathbf{A})^2}{2m^*} + V(z),$$

Mit B-Feld nur in z-Richtung (Wachstumsrichtung)

$$H_z = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z),$$

Dies führt in z-Richtung zu Eigenwerten die unabhängig vom B-feld sind.

Senkrecht dazu

$$H_{xy} = \frac{(p_x - |e|B_z y)^2 + p_y^2}{2m^*},$$

Ansatz: $\psi(x, y) = e^{ik_x x} \eta(y),$

Eigenwertproblem:

$$\left[\frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 \left(y - \frac{\hbar k_x}{|e|B_z} \right)^2 \right] \eta_{k_x}(y) = E \eta_{k_x}(y),$$

$$\omega_c = |e|B/m^*.$$

Diese Gleichung ist völlig identisch mit der eines eindimensionalen Quantummechanischen harmonischen Oszillators.

Lösung der Schrödinger Gleichung

mit $\omega_c = |e|\hbar/m^*$.

und der k_x abhängigen Schwerpunktskoordinate

$$y_0 = \frac{\hbar k_x}{|e|B}$$

erhalten wir als Resultat die von k_x unabhängigen quantisierten Energiezustände

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

Quantumzustände mit unterschiedlichen Quantumzahlen k_x aber derselben Quantumzahl n sind energetisch entartet. Alle Zustände mit unterschiedlichem k_x aber derselben Zahl n bilden die sogenannten **Landauniveaus**.

Die Energie sind bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ dieselben wie bei der Bohr-Sommerfeldnäherung, die damit nur für hohe n gültig ist.

Fächerförmige Struktur der Landauniveaus mit wachsendem Magnetfeld B .

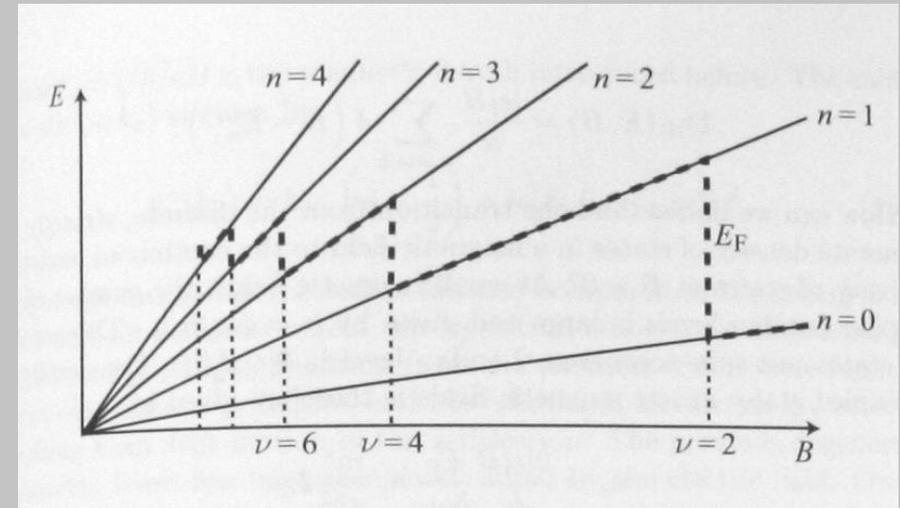


Fig. 16.5 Energy levels for electrons in a magnetic field. The energy of the Landau levels increases linearly with the magnetic field resulting in a fan-like diagram. The slope of each Landau level line depends on the quantum number n . At fixed electron density in the electron gas, the Fermi energy oscillates as a function of the filling factor (dashed line).

Lösung der Schrödinger Gleichung

Die Entartung eines Landauniveaus ist durch die Erfordernis, dass die Schwerpunktskoordinate y_0 innerhalb der Breite der Struktur W sein muss gegeben.. Für ein 2-dim Elektronengas der Länge L , ist die Dichte der k_x Zustände gleich $L/2\pi$. Sinnvolle k_x Werte gehorchen der Relation $0 \leq k_x L/2\pi \leq eB/hA$, wobei $A=W.L$ die Probenfläche ist. Die Zahl der erlaubten Zustände pro Einheitsfläche ist damit

$$n_L = \frac{|e|B}{h}$$

Hat das Elektronengas die Elektronendichte n_s , dann gibt uns die Zahl $\nu = n_s/n_L$ die Zahl der besetzten Landauniveaus bei einem Magnetfeld B an. Deshalb wird $\nu = hn_s/|e|B$ auch als **Füllfaktor** bezeichnet.

Bei einer fixen Elektronendichte n_s oszilliert deshalb die Fermienergie des Elektronengases als Funktion von B d.h. mit dem Füllfaktor ν in einer $1/B$ artigen Form.

Bei einer fixen Elektronendichte n_s oszilliert deshalb die Fermienergie des Elektronengases als Funktion von B d.h. mit dem Füllfaktor ν in einer $1/B$ artigen Form. Wird die Zemaufspaltung $g^* \mu_B B$ vernachlässigbar gegenüber der Landaulevelaufspaltung $\hbar\omega_c$, dann hat jedes Landauniveau $2n_L$ Elektronen pro Einheitsfläche und das Fermieniveau springt zwischen den Landauniveaus.

Lösung der Schrödinger Gleichung

Wird die Zeeman-Aufspaltung der elektronischen Niveaus mit berücksichtigt, addiert sich die Zeeman Energie zu den Landauniveaus und wir erhalten folgendes Spektrum:

$$E_n^\pm = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} g^* \mu_B B_z.$$

In dem bisherigen Model ist die Zustandsdichte in einem Magnetfeld gegeben durch

$$\mathcal{D}_{2D}(E, B) = \frac{|e|B}{h} \sum_{n, \sigma=\pm} \delta(E - E_n^{(\sigma)}).$$

How can we understand the transition from the discrete, strongly degenerate density of states in a magnetic field to the continuous, constant density of states at $B = 0$? At small magnetic fields, the number of occupied Landau levels is large and given by $\nu = E_F / \hbar\omega_c$. The number of states per spin-degenerate Landau level is $2|e|B/h$. The density of occupied states at low magnetic fields is therefore given by

$$\nu = E_F / \hbar\omega_c.$$

$$2|e|B/h.$$

$$n_s = \frac{2|e|B}{h} \frac{E_F}{\hbar\omega_c} = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} E_F.$$

This means that, in the limit of $B \rightarrow 0$, the Landau levels decrease their separation such that they eventually form the constant two-dimensional density of states. The energetic broadening of Landau levels to be discussed below contributes to the disappearance of the discrete density of states peaks.

Quantumbehandlung in einen ExB Feld

$$\mathbf{E} = (0, E, 0)$$

$$V(y) = |e|Ey.$$

Eigenwertproblem:

$$\left[\frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\omega_c^2 \left(y - \frac{\hbar k_x + m^*v_D}{|e|B_z} \right)^2 - \frac{\hbar k_x + m^*v_D}{|e|B_z} |e|E_y + \frac{1}{2}m^*v_D^2 \right] \eta_{k_x}(y) = E \eta_{k_x}(y).$$

mit der Driftgeschwindigkeit

$$v_D = E/B$$

und der Schwerpunktskoordinate

$$\tilde{y}_0 = \frac{\hbar k_x + m^*v_D}{|e|B},$$

Die Wellenfunktion des Zustandes (n, k_x) ist

$$\psi_{nk_x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi^{1/2}}} H_n[(y - \tilde{y}_0)/l_c] e^{-(y - \tilde{y}_0)^2/2l_c^2} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_x x},$$

und der magnetischen Länge

$$l_c = \sqrt{\hbar/eB}$$

Damit ergeben sich für die Energieeigenwerte (ohne g^* Faktor)

$$E_n(k_x) = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + |e|E_y \tilde{y}_0 + \frac{1}{2}m^*v_D^2.$$

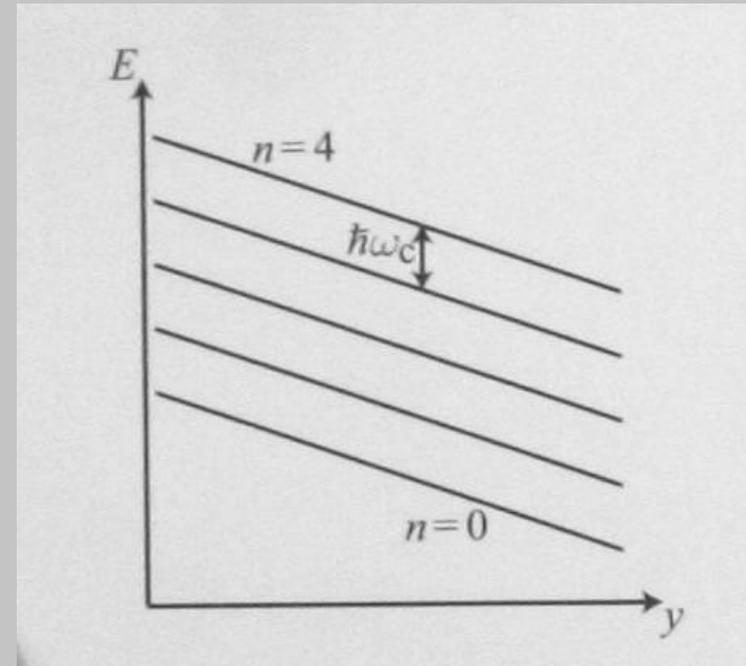


Fig. 16.6 Real space representation of the Landau level spectrum in the presence of an electric field in the y -direction. The slope of the Landau levels is given by $-eE$, and their spacing is $\hbar\omega_c$.

Verbreiterung der Landauniveaus durch Streuprozesse

Streuzeit

$$\frac{1}{\tau_q(E)} = \frac{2\pi}{\hbar} n_i \overline{v^2} \mathcal{D}(E),$$

Annahme: Lorentz-förmige Verteilung der Zustände aufgrund der Lebensdauererbreiterung

$$\mathcal{D}(E) = \frac{n_L}{\pi} \frac{\hbar/2\tau_q}{(E - E_0)^2 + (\hbar/2\tau_q)^2}$$

Dies führt zu einer elliptischen Dichteverteilung

$$\mathcal{D}(E) = \frac{n_L}{\pi\Gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{E - E_0}{\Gamma}\right)^2}$$

Mit einer charakteristischen Landaulevelverbreiterung

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \hbar\omega_c \frac{\hbar}{\tau_0}},$$

einer andere häufige Linienverbreiterung ist eine Gauss-förmige Landaulevelverbreiterung, dies führt zu

$$\mathcal{D}(E) = n_L \sqrt{\frac{2}{\pi\Gamma^2}} \exp\left(-2\frac{(E - E_0)^2}{\Gamma^2}\right).$$

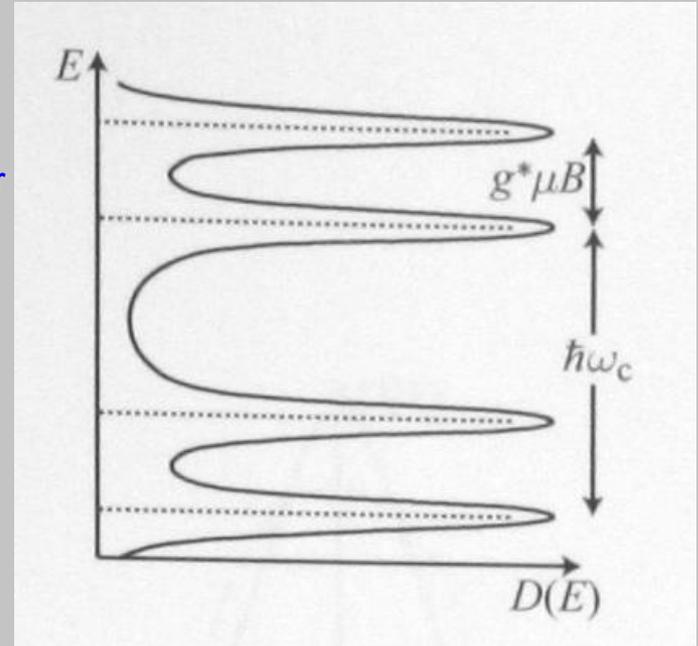


Fig. 16.7 Density of states for electrons in a magnetic field. The Landau levels are broadened by scattering at spatial potential fluctuations of the electron gas. The density of states peaks have an energetic separation of $\hbar\omega_c$. In addition, the electron spin leads to a Zeeman splitting of Landau levels.

Landaulevelverbreiterung

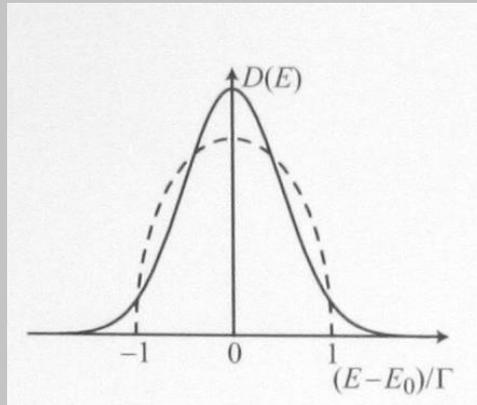


Fig. 16.9 Landau level density of states with gaussian broadening (solid line) and with semielliptic broadening (dashed line).

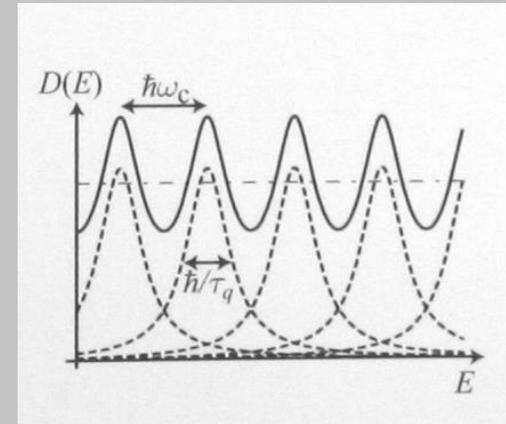
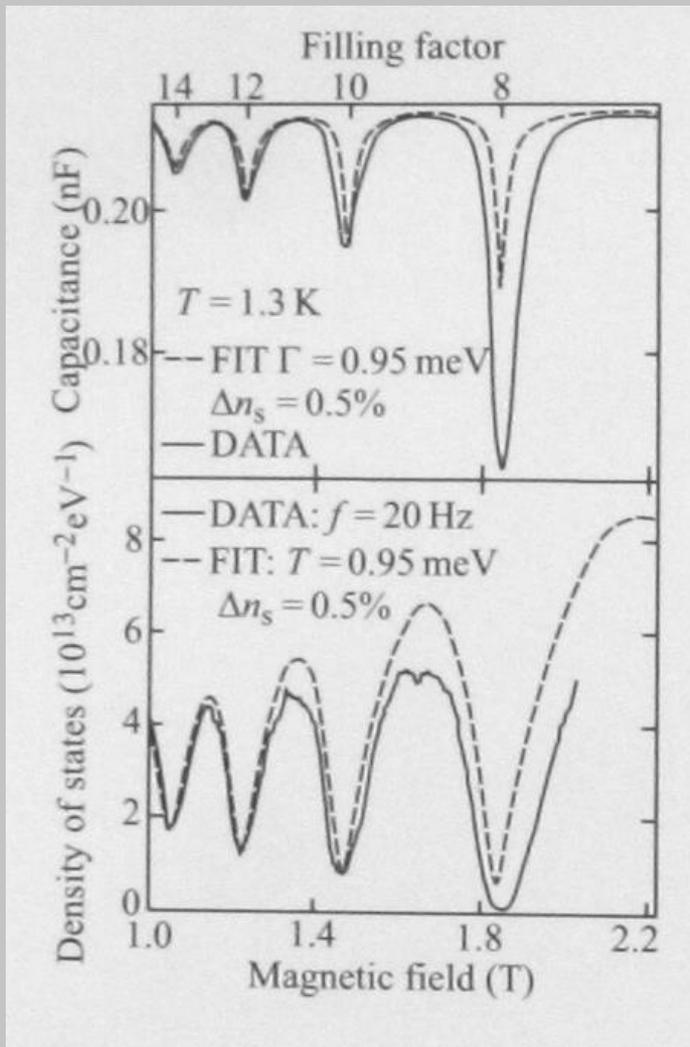


Fig. 16.10 Density of states of a two-dimensional electron gas as a function of energy at finite magnetic fields (solid line). It is composed of the sum of a number of individual Landau levels with separation $\hbar\omega_c$ and width \hbar/τ_q (dashed lines). The zero magnetic field density of states is the dash-dotted line.

Magnetokapazitätsmessungen



$$\frac{1}{C/A} = \frac{s+d}{\epsilon\epsilon_0} + \frac{1}{e^2} \frac{dE_0(n_s)}{dn_s} + \frac{1}{e^2} \frac{dE_F(n_s)}{dn_s}$$

$$\frac{1}{C/A} = \frac{s+d+\gamma\langle z \rangle}{\epsilon\epsilon_0} + \frac{1}{e^2 \mathcal{D}_{2D}^{(th)}(E_F, B)}$$

$$\mathcal{D}_{2D}^{(th)}(E_F, B) = dn_s/dE_F$$

$$\frac{dn_s}{dE_F} = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \left[1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \bar{L} \left(\frac{2\pi s}{\hbar \omega_c} \right) \frac{X_s}{\sinh X_s} \cos \left(\frac{2\pi s E_F}{\hbar \omega_c} \right) \right]$$

Fig. 16.12 (a) Measured and calculated capacitance of a GaAs/AlGaAs heterostructure in a magnetic field applied normal to the plane of the two-dimensional electron gas. (b) The extracted density of states (measured: solid line, calculated: dashed line). The calculation is based on Landau levels with gaussian broadening. (Reprinted with permission from Smith *et al.*, 1985. Copyright 1985 by the American Physical Society.)

Quantumtransport in niedrigdimensionalen HL

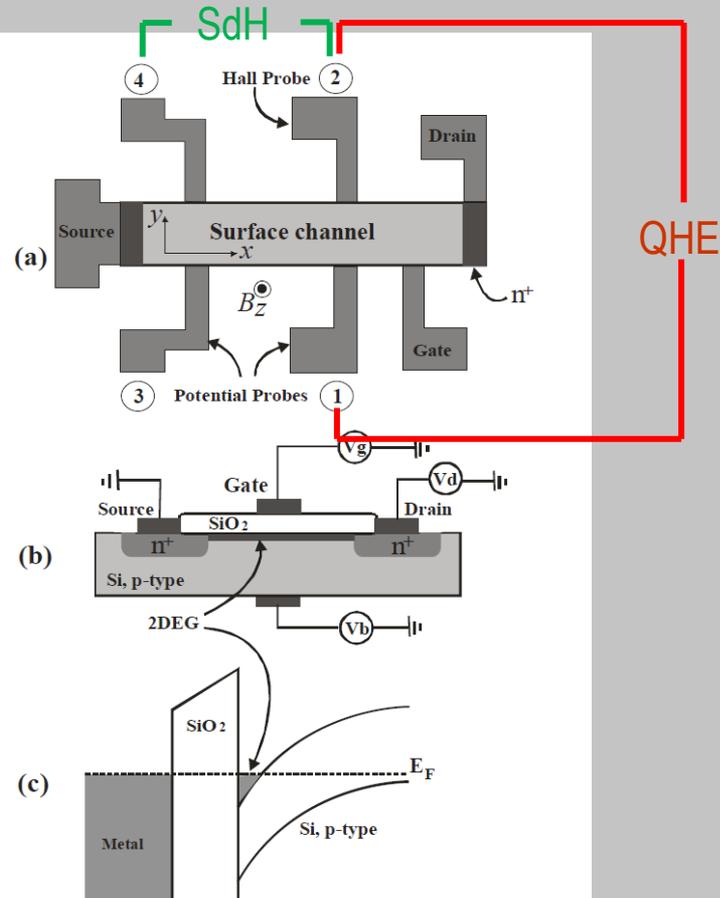


FIGURE 5.6 (a) A sketch of the device geometry used for both quantum Hall effect and Shubnikov-de Haas measurements. (b) A cross section of the n-type MOSFET device showing the channel underneath the oxide (SiO_2) layer. (c) The band bending near the oxide-Si interface showing the 2DEG.

InAs/AlGaSb Single Quantum Well

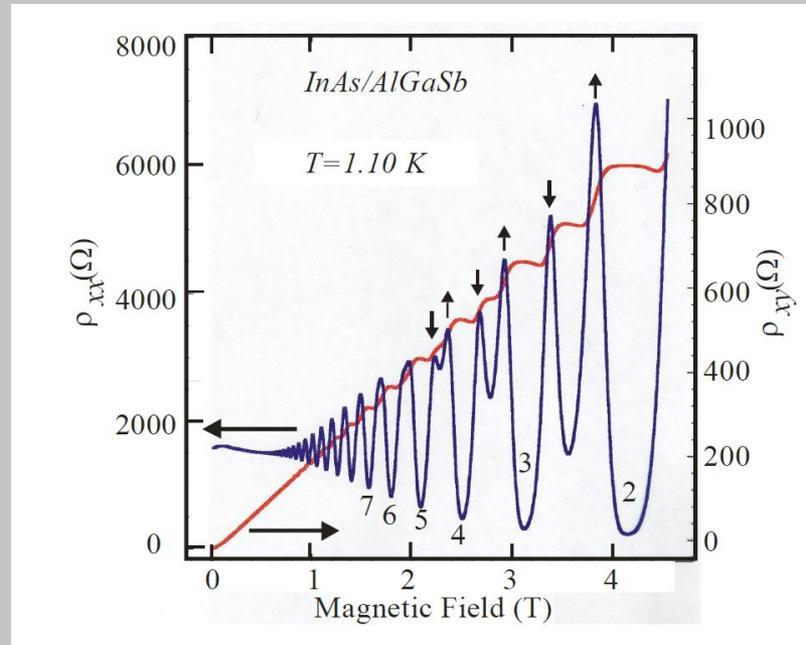


FIGURE 5.7 The quantum Hall effect resistivity, ρ_{xy} , observed as a function of the magnetic field. The parallel resistivity, ρ_{xx} , represents the Shubnikov-de Haas effect. The vertical arrows indicate electron spin up or spin down, and the integer numbers represent the filling factor. Notice that ρ_{xy} and ρ_{xx} are sheet resistivities and their unit is Ohm.

Landau-level Füllfaktor

$$\nu \equiv \frac{n_s h}{e B_z}$$

ν ist 1,2,3, ...

$$n_s = \frac{e}{h} \cdot \frac{1}{\Delta(1/B_z)}$$

InAs/AlGaSb Single Quantum Well - SdH

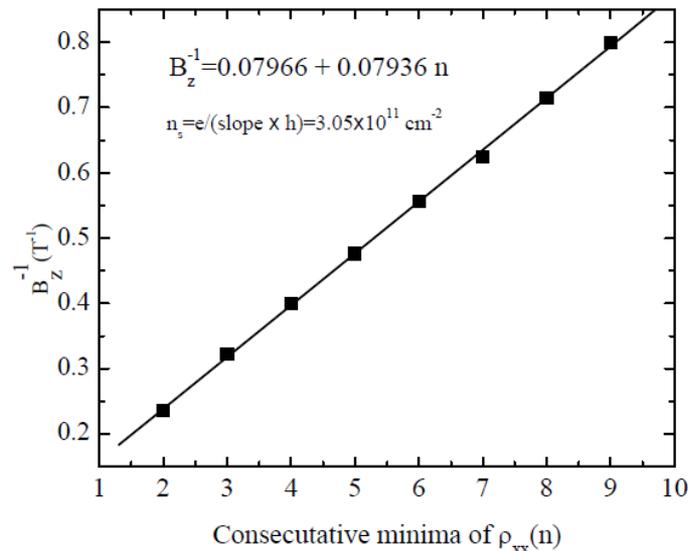


FIGURE 5.8 The inverse of the magnetic field plotted as a function of the consecutive minima obtained from ρ_{xx} in Fig. 5.7. The line is a linear fit to the data. The slope of the line is used to calculate the density of the 2DEG.

$$\rho_{xx}^{-1} = \sigma_{xx} = \frac{n_s e^2 \tau_f}{m^*} \frac{1}{1 + (\omega_c \tau_f)^2} \left[1 - \frac{2(\omega_c \tau_f)^2}{1 + (\omega_c \tau_f)^2} \frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c} \right]$$

$$\times \cos \hbar \left(\frac{2\pi^2 k_B T}{\hbar \omega_c} \right) \cos \left(\frac{2\pi E_F}{\hbar \omega_c} \right) \exp \left(-\frac{\pi}{\omega_c \tau_f} \right),$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} = \frac{2\pi \hbar^2 n_s}{m^*},$$

$$(\hbar \omega_c) \left(\frac{m^*}{2\pi \hbar^2} \right) = \frac{m^* \omega_c}{2\pi \hbar} = \frac{e B_z}{h}$$

QW in Magnetfeld

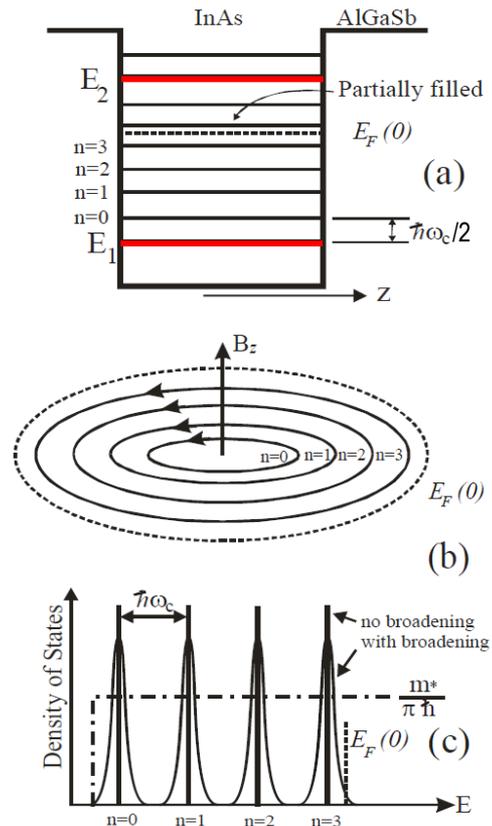


FIGURE 5.9 (a) A sketch of an InAs/AlGaSb single quantum well showing two bound states (E_1 and E_2), Fermi energy level, $E_F(0)$, and Landau levels. (b) Landau levels are filled up to the Fermi energy level, which contains all allowed states when the magnetic field is zero. (c) Energy representation of Landau levels and Fermi level. Landau levels are broadened because of various scattering mechanisms.