Elektrische Felder QW

Betrachten zunächst die Wirkung eines E-Feldes auf Bandzustände.

$\vec{E}$ in z-Richtung => Pot Energie = eEz

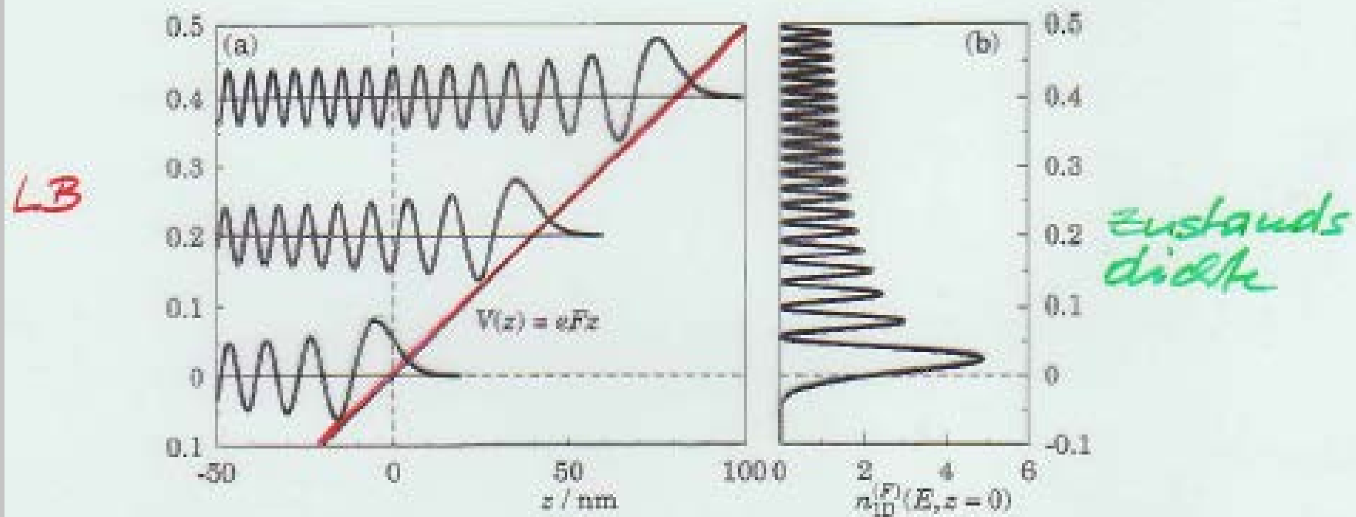
Die Lösungen der Schrödinger Gl.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + eEz\right]\psi(z) = \varepsilon\,\psi(z)$$

kennen wir bereits vom Dreieck Pot.

Wellenfunkt. => stehende Wellen durch

Elektrische Felder QW



IRE 6.1 (a) Potential energy eFz, three wave functions, and energies for electrons in GaAs uniform electric field of 5 MV m^{-1}. (b) Local density of states at $z = 0$, showing how the res correspond to the wave functions.

Interferenz zw. einlaufender u. auslaufender Welle

Elektrische Felder QW

⇒ Die Bandzustände dehnen sich in die verbotene Zone aus

⇒ Die Zustandsdichte zeigt ein oszillatorisches Verhalten

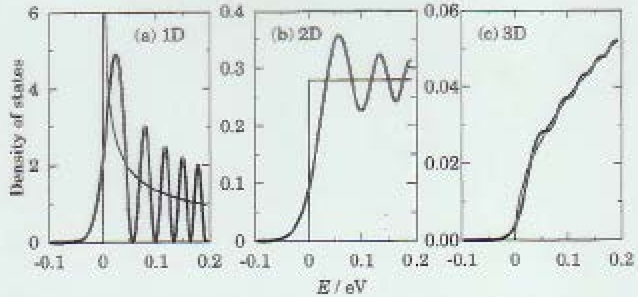


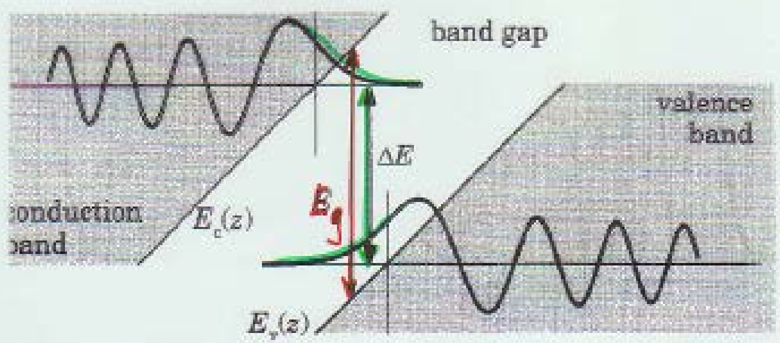
FIGURE 8.2. Local density of states $n^{(F)}(E,z)$ for electrons in GaAs in an electric field of $5\ \mathrm{MV\,m^{-1}}$ as a function of local kinetic energy, $\varepsilon = E - eFz$. The thin curves are the results for free electrons. The units of $n(E,z)$ are $\mathrm{eV^{-1}\,nm^{-d}}$ in d dimensions.

⇒ Dies führt zu einer Veränderung der optische Absorption (Emission)

Franz - Keldysh Effekt

Franz-Keldysh Effekt

Absorption (Emission) nur zwischen Zuständen, die im Ortsraum überlappen

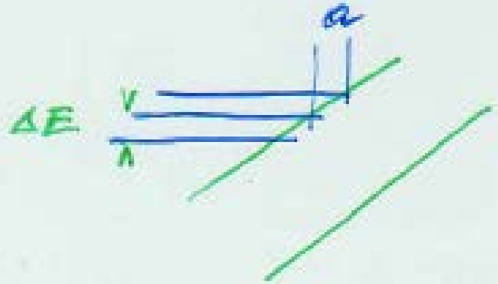


Absorption (Emission) bei $\hbar\omega < E_g$

Absorption und Emission

Wegen des Kristallpotentials können die stehenden Wellen aber nicht beliebig zueinander verschoben werden

=> Diskrete Energieniveaus mit Abstand $\Delta E = eEa$ Stark-Leiter



Elektronen und Löcher in einem QW

Das E-Feld polarisiert die lok. Ladungen und erzeugt ein Dipolmoment

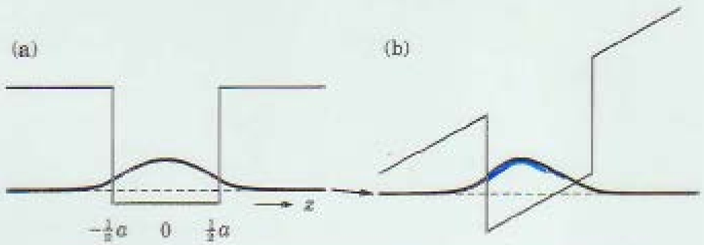


FIGURE 7.1. A quantum well (a) with flat potentials and (b) in an electric field.

Mit Störungsrechnung kann man zeigen, daß dadurch die lok. Energie erniedrigt wird

⇒ Änderung der Absorption (Emissions) energie

Quantum Confined Stark Effekt (QCSE)

QCSE: Experimentelle Ergebnisse
AlGaAs/GaAs QW (9.5nm)

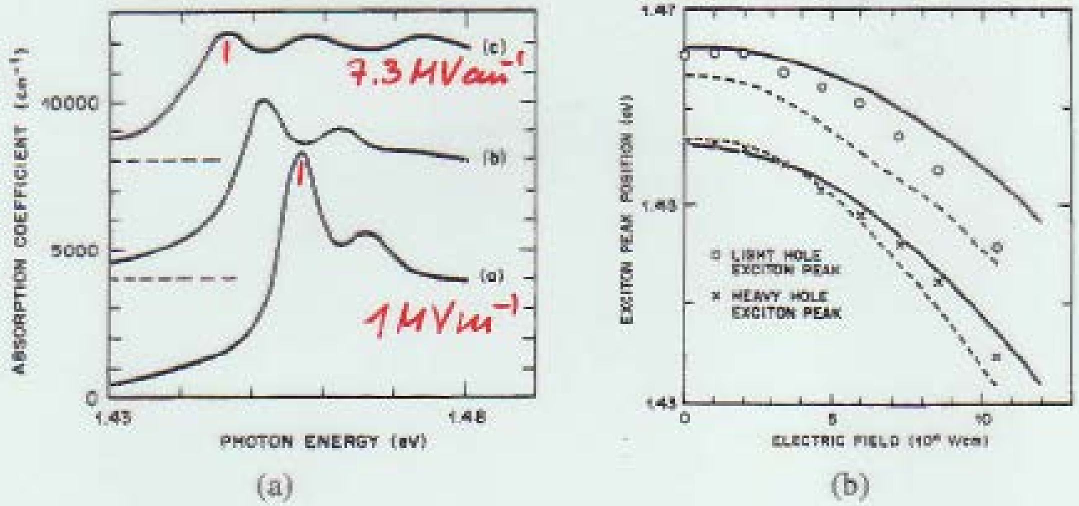


FIGURE 7.3. (a) Absorption spectra of a multiquantum well as a function of normal electric field. The GaAs wells were 9.5 nm wide, separated by 9.8 nm barriers of $Al_{0.32}Ga_{0.68}As$. The fields were (a) 1.0, (b) 4.7, and (c) 7.3 MV m^{-1}. The two peaks on each curve are due to the light and heavy holes. (b) Position of the peaks in energy as a function of the electric field; the lines are theoretical estimates. [From Miller et al. (1985).]

auch in QW aus III-Nitriden
(GaN, GaInN, GaAlN)

Elektrisches Feld auf einen QW

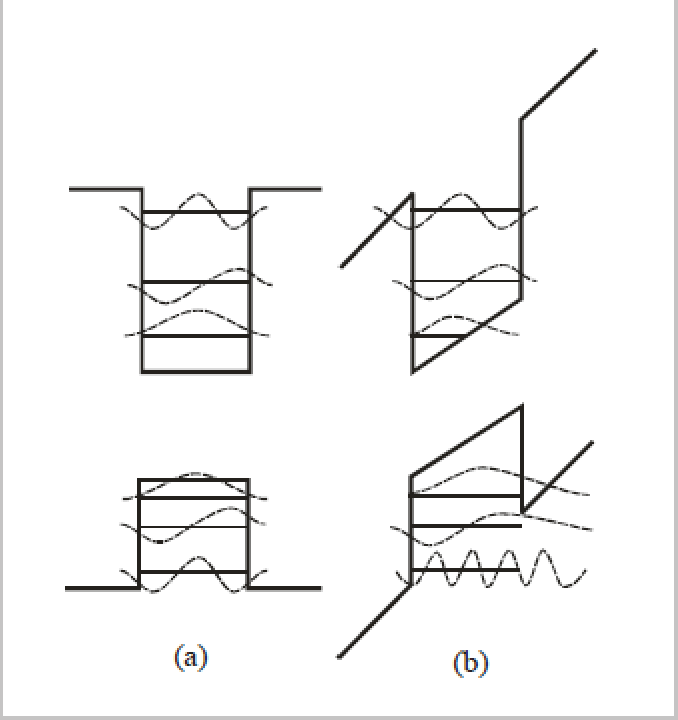


Fig. 3.17. *The effect of applied electric field on quantum wells includes the modification of the energy levels and their wave functions. (a) A quantum well is sketch in the absence of the electric field and (b) the modified band structure in the presence of an electric field.*

Dreiecksförmiger QW

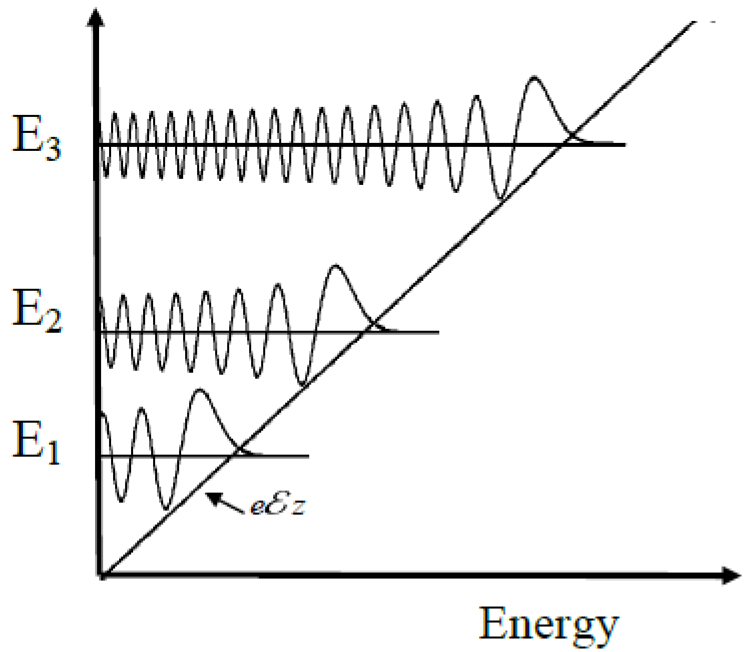


Fig. 3.18. *A triangular quantum well formed by applying a uniform electric field. Three energy levels are shown along with their wave functions. The wave functions have the form of Airy functions that satisfy the boundary conditions.*

Zustandsdichte unter Einfluss des elektr. Feldes

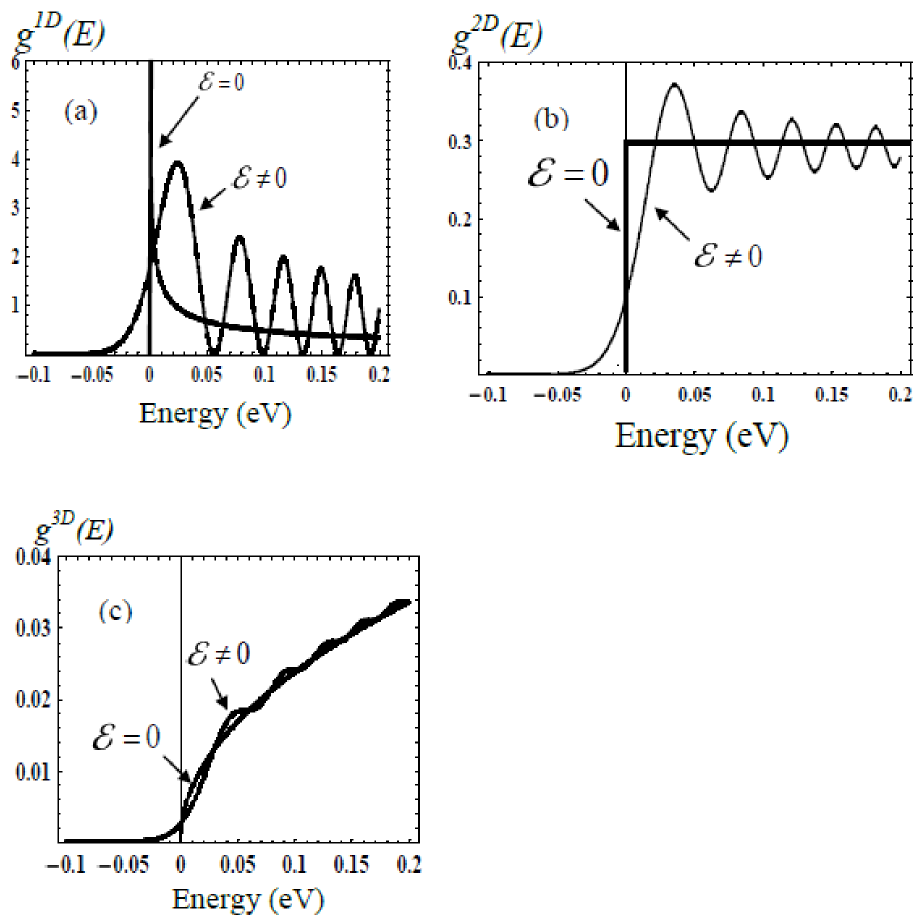


Fig. 3.19. *The density of states under the influence of uniform electric field is plotted as a function of energy for (a) quantum wire, (b) quantum well, and (c) bulk materials (after Davies).*

3-dim Zustandsdichte unter Einfluss eines elektr. Feldes

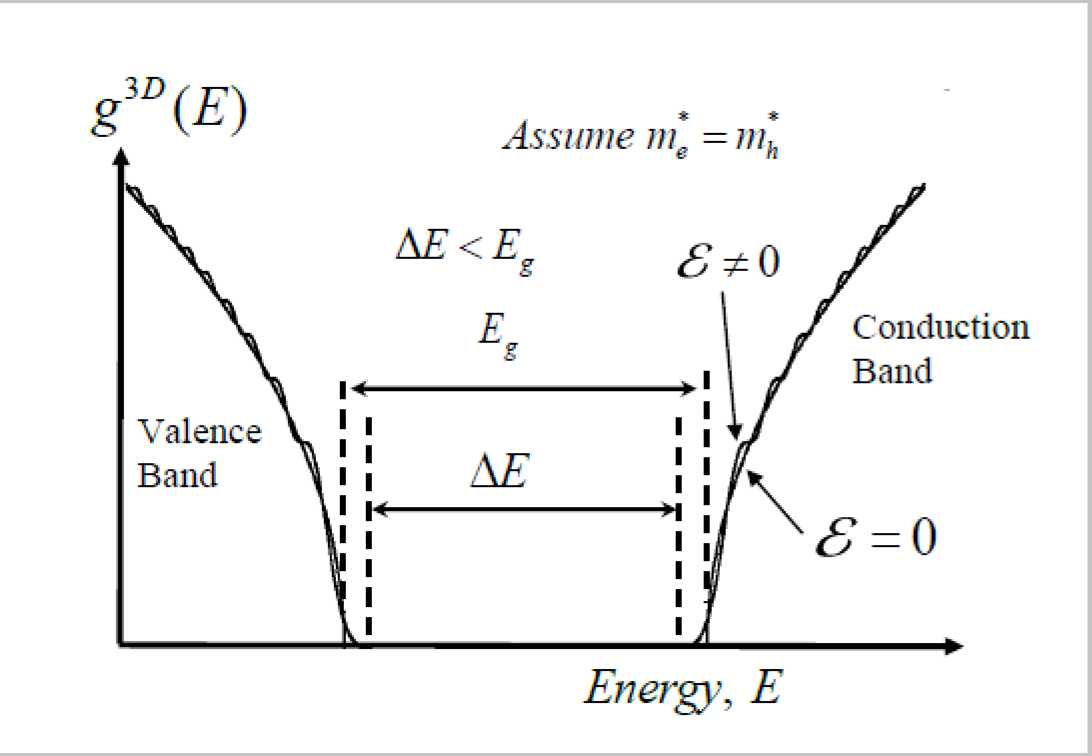


Fig. 3.20. *The densities of states is plotted as a function of energy for both the conduction and valence bands with (rippled curves) and without (smooth curves) an applied electric field.*

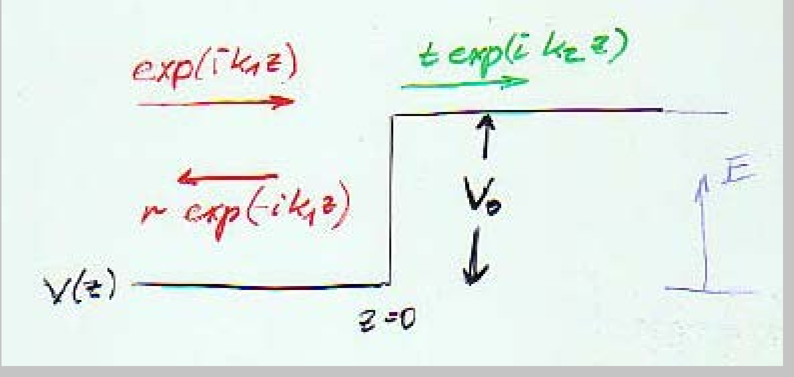
Tunnelströme

Haben bisher die gebundenen Zustände im QW betrachtet. Jetzt wollen wir uns ansehen, was geschieht, wenn freie Elektronen auf Potentialstufen treffen.

⇒ Tunnelströme, Resonante Zustände
Supergitter

Betrachten zunächst Potentialstufe:

Elektron wird durch Welle (kohärente) dargestellt (analog EM Welle ohne Absorption)



r, t Reflexion, Transmission } Amplitude

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

Schrödinger Gleichung für Potenzialbarriere

Schreiben nun die Lösung der Schrödingergl. allgemein an

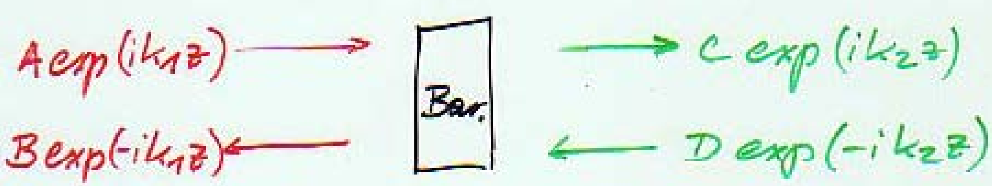
zunächst! für $E > V_0$

$$\psi(z) = \begin{cases} A\exp(ik_1 z) + B(\exp(-ik_1 z)) & z<0 \\ C\exp(ik_2 z) + D(\exp(-ik_2 z)) & z>0 \end{cases}$$

Kontinuitätsbed. bei $z=0$

Ampl.: $A+B = C+D$

Abl.: $k_1(A-B) = k_2(C-D)$



kennt man die Ampl. links so erhält man aus den Kont. bed. die Ampl. rechts

$$\hookrightarrow \quad C = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)A + \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)B$$

$$D = \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)A + \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)B$$

mit $A=1$, $B=r$, $C=t$ und $D=0$ ergibt dies

Wenn $E < V_0$

dann werden die Wellen rechts nur eindringen (reale, abnehmende exp. Funkt.

$k_2^2 \rightarrow \kappa_2^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$ $(k_2 = i\kappa_2)$

$\leftarrow \quad C\exp(-\kappa_2 z)$

$\rightarrow \quad D\exp(\kappa_2 z)$

$$\Rightarrow t = \frac{2k_1}{k_1 + i\kappa_2} \qquad r = \frac{k_1 - i\kappa_2}{k_1 + i\kappa_2}$$

komplexe Koeff. $\Rightarrow$ es wird keinen Stromfluß über Barrier geben

d.h. $T = 0$, $R = |r|^2 = 1$

nur Eindringen der Welle in Barriere

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \qquad r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

Den Fluß der Elektronen (Strom) erhält man aus der Stromdichte einer Welle $F \exp(ikx)$ zu $\underbrace{\frac{\hbar k}{m}}_{v} \cdot |F|^2$

und damit die Fluß Refl. u. Transm.

$$T = \frac{(\hbar k_2/m)\,|t|^2}{(\hbar k_1/m)} = \frac{k_2}{k_1}|t|^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$R = \frac{(\hbar k_1/m)\,|r|^2}{(\hbar k_1/m)} = |r|^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

$$R + T = 1$$

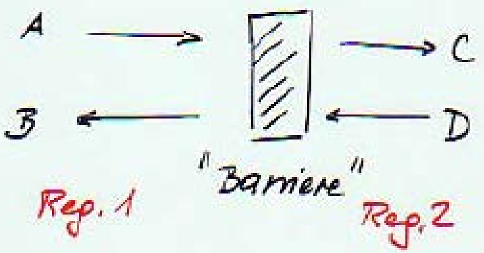
T-Matrizen

In der Folge besprechen wir ein Konzept, mit dem allgemein das Reflexions u. Transmissionsvermögen von "Pot. Stufen" beschrieben werden kann. (Kommt aus der Optik!)

Schreiben Beziehung zw. A,B und C,D als Matrix gl.

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = T^{(2,1)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

dies bedeutet



T-Matrizen

Wenn mehrere Barrieren vorliegen gilt

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = T^{(32)}\, T^{(21)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T^{(31)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

170

Mit

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = T^{(21)} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = T^{(32)} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

(Dies erklärt auch die Reihenfolge der Schreibweise!)

T-Matrizen

Damit erhalten wir für die Potentialstufe bei $z=0$

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad r = -\frac{T_{21}}{T_{22}} \qquad t = \frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}$$

mit $r = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ $\qquad t = \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2} = \dfrac{1}{T_{22}}$

erhält man

$$\boxed{T^{(21)} = \frac{1}{2k_2} \begin{pmatrix} k_2 + k_1 & k_2 - k_1 \\ k_2 - k_1 & k_2 + k_1 \end{pmatrix} \equiv T(k_2, k_1)}$$

für $E > V_0$, für $E \leq V_0$ wird $k_2 = i\kappa_2$

T-Matrizen

Aus der Erhaltung des Teilchenstroms und der Inv. bezüglich Zeitumkehr folgen weitere Eigenschaften der T-Matrizen

i) $\det|T| = 1$

ii) $T_{22} = T_{11}^*$

$T_{21} = T_{12}^*$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^* & T_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix}$$

iii) Wenn $T^{(21)}$ für Teilchen von <u>Links</u> gilt

dann sei $T^{(12)} \equiv T'$ die T Matrix für Teilchen von <u>rechts</u>

T-Matrizen

es gilt $\quad T_{11}' = T_{11}$

$$T_{12}' = -T_{12}^*$$

$$T' = \begin{pmatrix} T_{11} & -T_{12}^* \\ -T_{12} & T_{11}^* \end{pmatrix}$$

Betrachten nun eine Stufe bei $z=d$

Die Matrix $T(d)$ kann aus $T(0)$ durch Transformation $z' = z-d$ gewonnen werden.

T-Matrizen

a) Bringen Stufe an die Stelle $z' = 0$
durch $z' = z - d$ auf linker Seite

dann wird die von links einlaufende Welle $\exp(ik_1 z')\,\underline{\exp(ik_1 d)}$

und die nach links laufende Welle

$$\exp(-ik_1 z')\,\underline{\exp(-ik_1 d)}$$

d.h. Amplituden werden mit $\exp(ik_1 d)$ bzw. $\exp(-ik_1 d)$ multipliziert

oder: Multiplizieren Ampl. mit

$$\begin{pmatrix} e^{ik_1 d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 d} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Ampl}_{\mathrm{Links}}$$

b) $T(0)$ kann nun verwendet werden um Ampl. auf der rechten Seite zu berechnen

$$A_r = T(0) \begin{pmatrix} e^{ik_1 d} & \\ & e^{-ik_1 d} \end{pmatrix} \cdot A_L$$

T-Matrizen

c) Bringen nun Stufe an $z = d$ durch Rücktransf. $z = z' + d$

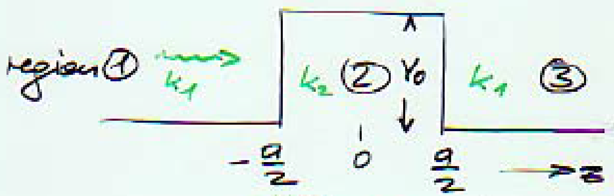
dies bedeutet wieder Phasenfaktoren für die Ampl. (auf der rechten Seite) daher mit k_2!)

insgesamt ergibt sich

$$T(d) = \begin{pmatrix} e^{-ik_2 d} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 d} \end{pmatrix} T(0) \begin{pmatrix} e^{ik_1 d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 d} \end{pmatrix}$$

T-Matrizen

Damit können wir nun auch beschreiben, was passiert, wenn eine Teilchenwelle auf ein Rechteckpotential auftrifft.



$$T^{(31)} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-ik_1\frac{a}{2}} & 0 \\ 0 & e^{ik_1\frac{a}{2}} \end{pmatrix} T(k_1,k_2) \begin{pmatrix} e^{ik_2\frac{a}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2\frac{a}{2}} \end{pmatrix}}_{\text{Transm. } 2\to 3} \times$$

$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} e^{ik_2\frac{a}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2\frac{a}{2}} \end{pmatrix} T(k_2,k_1) \begin{pmatrix} e^{-ik_1\frac{a}{2}} & 0 \\ 0 & e^{ik_1\frac{a}{2}} \end{pmatrix}}_{\text{Transm. } 1\to 2}$$

T-Matrizen

Und damit erhält man

$$T(E) = |t|^2$$

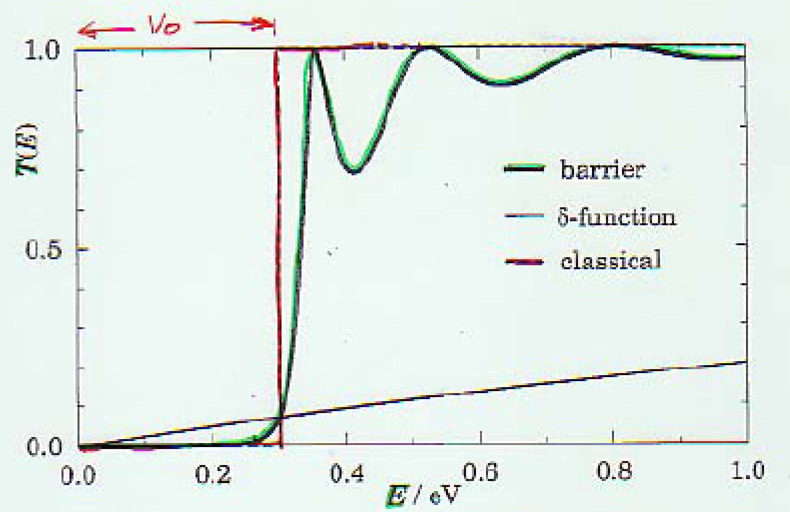
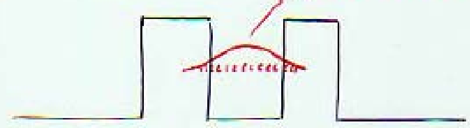


FIGURE 5.6. Transmission coefficient $T(E)$ as a function of energy E for a square potential barrier of height $V_0 = 0.3$ eV and thickness $a = 10$ nm in GaAs. The thin curve is for a δ-function barrier of the same strength $S = V_0 a$, and the broken curve is the classical result for a barrier of the same height.

T-Matrizen

Besonders interessant ist der Fall, wenn <u>zwei</u> Barrieren nahe aneinander liegen



Transmission in einer Dimension (z)

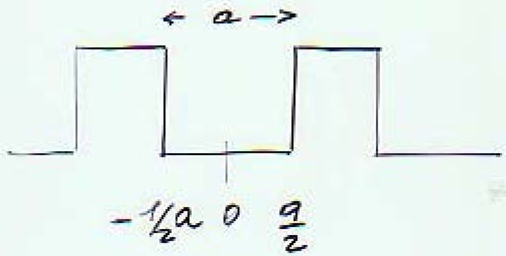
Für Teilchen im QW sei T_R die T-Matrix für <u>rechte</u> Barriere und T_L die T-Matrix für <u>linke</u> Barriere

$$T_L = \begin{pmatrix} 1/t_L^* & r_L/t_L \\ r_L^*/t_L^* & 1/t_L \end{pmatrix} \qquad T_R = \begin{pmatrix} 1/t_R^* & -r_R^*/t_R^* \\ -r_R/t_R & 1/t_R \end{pmatrix}$$

t_R, r_R, t_L, r_L seien die Transm. und Reflexionskoeff. der Amplituden

T-Matrizen

Können nun die T-Matrix für die Resonante Tunnelstruktur $T = T^{(31)}$ wie bei Rechteckpot. schreiben



$$T = \begin{pmatrix} e^{-ika/2} & 0 \\ 0 & e^{ika/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t_R^* & -\frac{r_R^*}{t_R^*} \\ -\frac{r_R}{t_R} & \frac{1}{t_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ika/2} & 0 \\ 0 & e^{-ik\frac{a}{2}} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{ika/2} & 0 \\ 0 & e^{-ik\frac{a}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t_L^*} & \frac{r_L}{t_L} \\ \frac{r_L^*}{t_L^*} & \frac{1}{t_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ika/2} & 0 \\ 0 & e^{ika/2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{t_L t_R}{1 - r_L r_R \exp(2ika)}$$

T-Matrizen

Das Verhalten von t und $T = |t|^2$ wird besonders klar, wenn die Refl.koeff. r (im Allg. kompl. wegen Phasensprung) in polarer Form $r = |r| \cdot \exp(i\varphi)$ geschrieben werden

$$\Rightarrow T = |t|^2 = \frac{T_L T_R}{1 + R_L R_R - 2\sqrt{R_L R_R}\cos(2ka + \varphi_L + \varphi_R)}$$

untersucht man T als Funktion der Energie E des Teilchens, so ergibt sich die stärkste Änderung aufgrund des cos Terms, wenn $\cos(2ka + \varphi_L + \varphi_R) = 1$

d.h. $2ka + \varphi_L + \varphi_R = 2n\pi$

T-Matrizen

Dies ist aber genau dann der Fall, wenn
Teilchenwelle eine stehende Welle im QW
bildet ⇒ Transmission maximal
bei Energie der QW-Zustände
179
Resonantes Tunneln

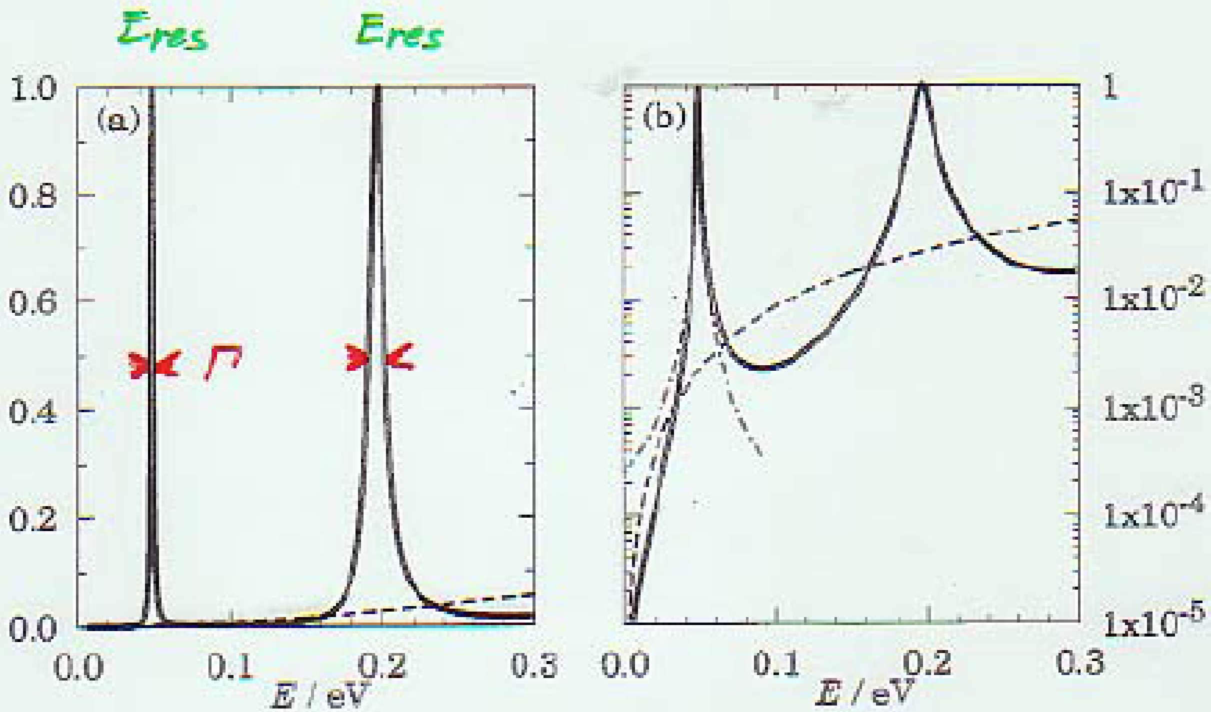
Bei $E = E_{res}$ wird T_{res} groß

Für T_R, T_L klein und gleich gilt : $T_{res} \to 1$

$$\Gamma \propto \frac{T_L + T_R}{2a}$$

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

T-Matrizen



URE 5.11. Transmission coefficient of a resonant-tunnelling structure on (a) linear and (b) log-
ımic scales. The barriers are δ-functions of strength 0.3 eV × 5 nm separated by 10 nm. The
d curve is $T(E)$ for the whole structure, the dashed curve shows the square of $T(E)$ for a single
ier and would apply to the double-barrier structure if there were no resonance, and the chain
ve is the Lorentzian approximation to the lowest resonance.

RTD – negativer differentieller Widerstand (NDR)

Anwendungen des resonanten Tunnelns:

Res. Tunnel Diode → NDR

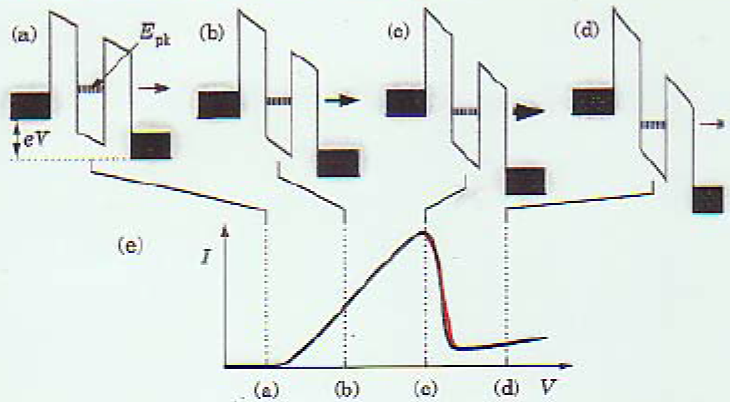


FIGURE 5.13. Profile through a three-dimensional resonant-tunnelling diode. The bias increas from (a) to (d), giving rise to the $I(V)$ characteristic shown in (e). The shaded areas on the left a right are the Fermi seas of electrons.

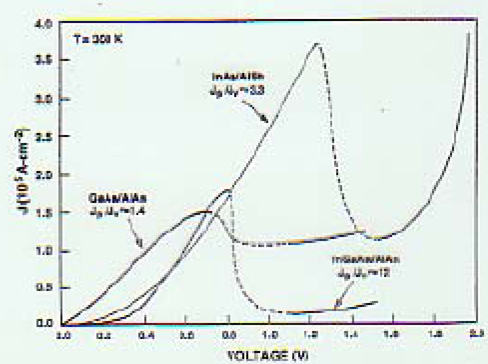


FIGURE 5.15. Characteristics of resonant-tunnelling diodes in three material systems measured at room temperature. [From Brown (1994).]

RTBT

resonant-tunneling bipolar T.
(RTBT)

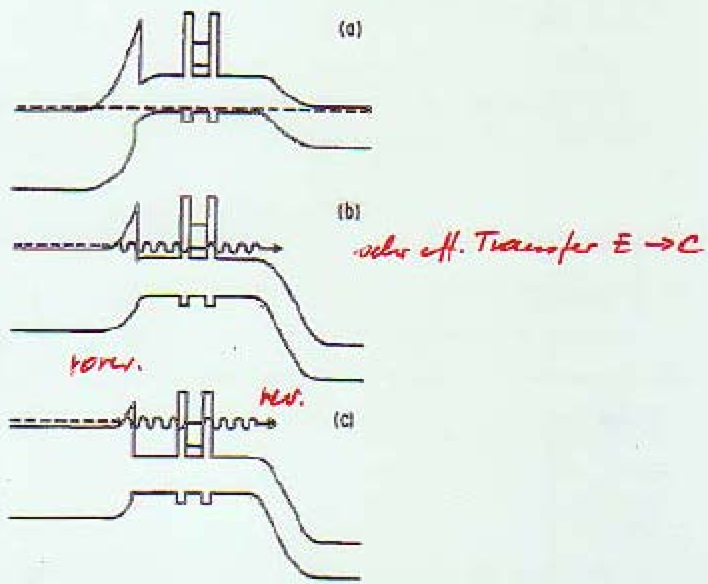


Fig. 13. Band diagram of a resonant-tunneling bipolar transistor (RTBT) with tunneling emitter under different bias conditions: (a) in equilibrium; (b) resonant tunneling through the first level in the well; (c) resonant tunneling through the second level. (Not to scale.)

RTBT

"heiße" e^-

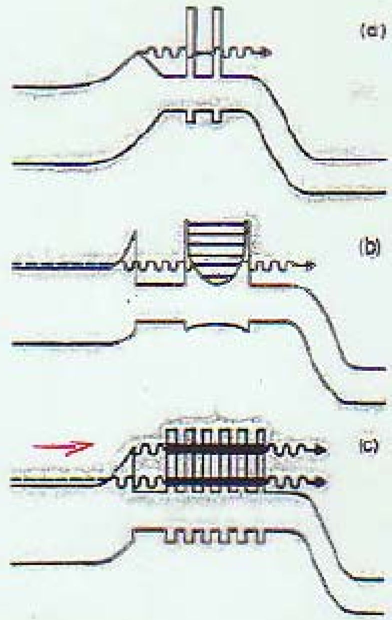


Fig. 14. (a) Band diagram of RTBT with graded emitter (at resonance). Electrons are ballistically launched into the first quasi-eigenstate of the well. (b) RTBT with parabolic quantum well in the base and tunneling emitter. A ballistic emitter can also be used. (c) RTBT with superlattice base. (Not to scale.)

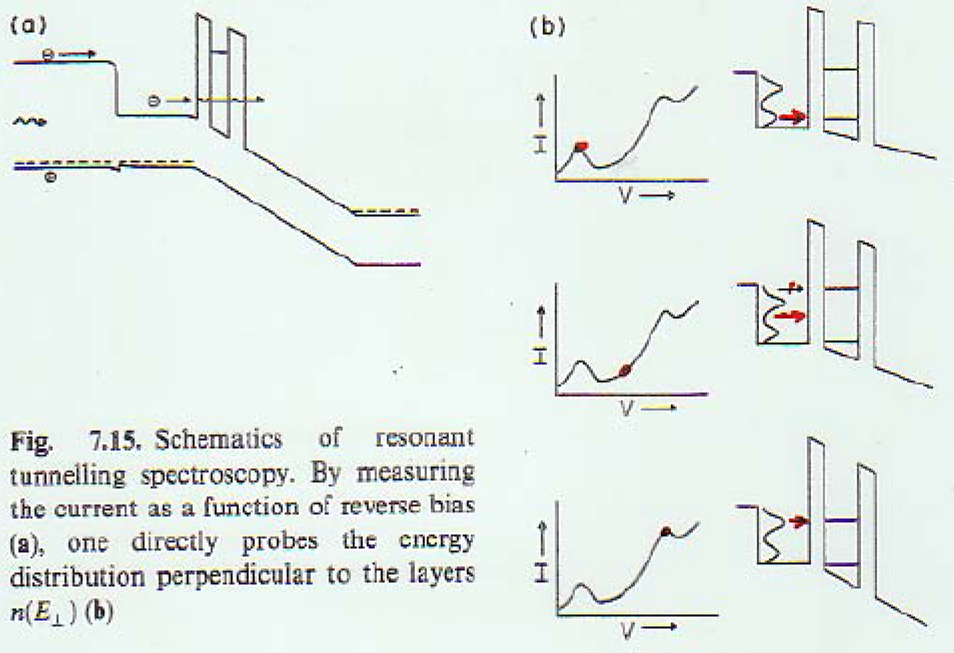
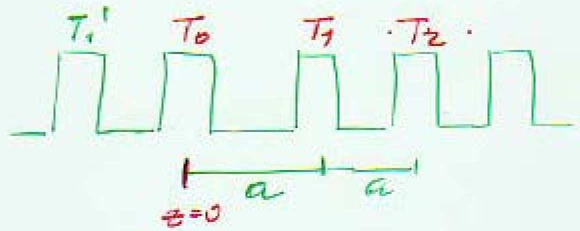


Fig. 7.15. Schematics of resonant tunnelling spectroscopy. By measuring the current as a function of reverse bias (**a**), one directly probes the energy distribution perpendicular to the layers $n(E_\perp)$ (**b**)

Übergitter - superlattice

Betrachten regelmäßige Anordnung von QW's mit T-Matrix



Die 'Barriere' bei z=0 habe Transfer Matrix T_0

Dann hat die nächste B. rechts

$$T_1 = \begin{pmatrix} e^{-ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{ik_1 a} \end{pmatrix} T_0 \begin{pmatrix} e^{ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 a} \end{pmatrix} = A^{-1} T_0 A$$

$$T_2 = A^{-1}(A^{-1} T_0 A) A = A^{-2} T_0 A^2$$

Übergitter - superlattice

und die gesamte Anordnung

$$T = \underbrace{(A^{-2} T_0 A^{2})}_{T_2} \underbrace{(A^{-1} T_0 A)}_{T_1} T_0 \underbrace{(A T_0 A^{-1})}_{T_1'} \underbrace{(A^{2} T_0 A^{-2})}_{T_2'} \ldots =$$

$$= \ldots T_0 A T_0 A T_0 A T_0 A T_0 A \ldots$$

Dies sieht aus wie eine regelmäßige

Es gibt Wellen, die sich aufgrund des Resonanten Tunneleff. über die gesamte Anordnung der QW ausbreiten können.

⇒ Bandzustände (Bänder)

die von Gebieten (Energie) mit geringer Transmission getrennt werden.

Übergitter - superlattice

(Das Modell einer regelmäßigen Anordnung von (δ) Potentialen war eines der ersten Modelle für "Bandstrukturen"

Kronig - Penney Modell