Verstärkung im Resonator

- Moden propagieren im Resonator

- Wie kommt man zu einer so hohen Photonendichte, dass die stimulierte Emission dominiert?

- Im geführten Bereich des Resonators muss es Verstärkung geben!!

Optische Absorption, Verluste und Verstärkung

Ein mit einer elektromagnetischen Welle verbundenen Photonenstrom, der durch einen Halbleiter wandert kann durch folgende Gleichung beschrieben werden.

$$\boxed{I_{ph} = I_{ph}^{0} \exp\left(-\alpha \cdot z\right)}$$

wobei

α … der Absorptionskoeffizient (positive Größe)

I_{ph}^0 …der Photonenstrom bei z=0

Die optische Intensität ($P_{opt} = I_{ph} \cdot \hbar\omega$) fällt exponentiell ab, wenn die Welle sich in z-Richtung ausbreitet und α positiv ist.

Bem.:

α.. ~ $10^4 – 10^5\ cm^{-1}$ bei E_{gap}

$\frac{1}{\alpha}$.. ~ 1µm – 0.1 µm ……….Eindringtiefe

Werden jedoch Elektronen und Löcher in das Leitungsband- bzw. Valenzband gepumpt, dann kann der e-h Rekombinationsprozess (d.h. die Photonenemission) stärker sein als der Umkehrprozess der e-h Erzeugung (d.h. der Absorption).

Verstärkung

Im allgemeinen wird ein Verstärkungskoeffizient g($\hbar\omega$) definiert, als

Gain = Emissionskoeffizient - Absorptionskoeffizient

Ist $f^e(E^e)$ und $f^h(E^h)$ die Elektron- und Löcherbesetzung, so hängt der Emissions-koeffizient von dem Produkt von $f^e(E^e)$ und $f^h(E^h)$ ab, während der Absorptions-koeffizient durch das Produkt (1-$f^e(E^e)$) und (1-$f^h(E^h)$) gegeben ist.

Des Weitern gilt:

$$E^e = E_C + \frac{m_r^*}{m_e^*}\left(\hbar\omega - E_{gap}\right)$$

$$E^h = E_V - \frac{m_r^*}{m_h^*}\left(\hbar\omega - E_{gap}\right)$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeiten $f^e(E^e)$ und $f^h(E^h)$ werden durch die Quasi-Fermi-Niveaus für Elektronen E_{Fn} und E_{Fp} beschrieben. Die Verstärkung, die ja die Differenz zwischen Emissions- und Absorptionskoeffizient ist , wird damit

$$g(\hbar\omega) \propto f^e(E^e)\cdot f^h(E^h) - \left\{1 - f^e(E^e)\right\}\cdot\left\{1 - f^h(E^h)\right\})$$

$$= \left\{f^e(E^e) + f^h(E^h)\right\} - 1$$

Verstärkung und Inversion

Die optische Welle hat eine allgemeine räumliche Intensitätsabhängigkeit

$$\boxed{I_{ph} = I_{ph}^{0} \exp\left(g(\hbar\omega) z \right)}$$

Und wenn g positiv ist, dann wächst die Intensität, da zusätzlich Photonen durch Emission zur Intensität dazugegeben werden.
Die Bedingung für eine positive Verstärkung erfordert „Inversion“ des Halbleiters, d.h.

$$\boxed{f^{e}(E^{e}) + f^{h}(E^{h}) > 1}$$

Um diese Bedingung zu erfüllen müssen die Quasi-Fermi-Niveaus in das jeweilige Band (LB bzw. VB) eindringen (d.h. entartete HL).

Der exakte Ausdruck für die Verstärkung ist in Volumenhalbleitern:

$$\boxed{g(\hbar\omega) = \frac{\pi e^{2}\hbar}{m_0^{2} \cdot c \cdot n_r \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \left| a \cdot p_{CV} \right|^{2} N_{CV} \left[f^{e}(E^{e}) + f^{h}(E^{h}) - 1 \right]}$$

Wird jetzt $f^e(E^e) = 0 = f^h(E^h)$, dann ist $g(\hbar\omega) = -\alpha(\hbar\omega)$, d.h. der negative Absorptions-koeffizient.

Verstärkung im Halbleiter

Für GaAs ergibt sich:

$$g(\hbar\omega) = 5.6\cdot 10^{-4}\,\frac{\left(\hbar\omega - E_g\right)}{\hbar\omega}\left[f^e(E^e)+f^h(E^h)-1\right]\quad\left[cm^{-1}\right]$$

Für einen anderen Halbleiter A ändert sich der Vorfaktor nur durch

$$\left[{m_r^*(A)}\Big/{m_r^*(GaAs)}\right]^{3/2}$$

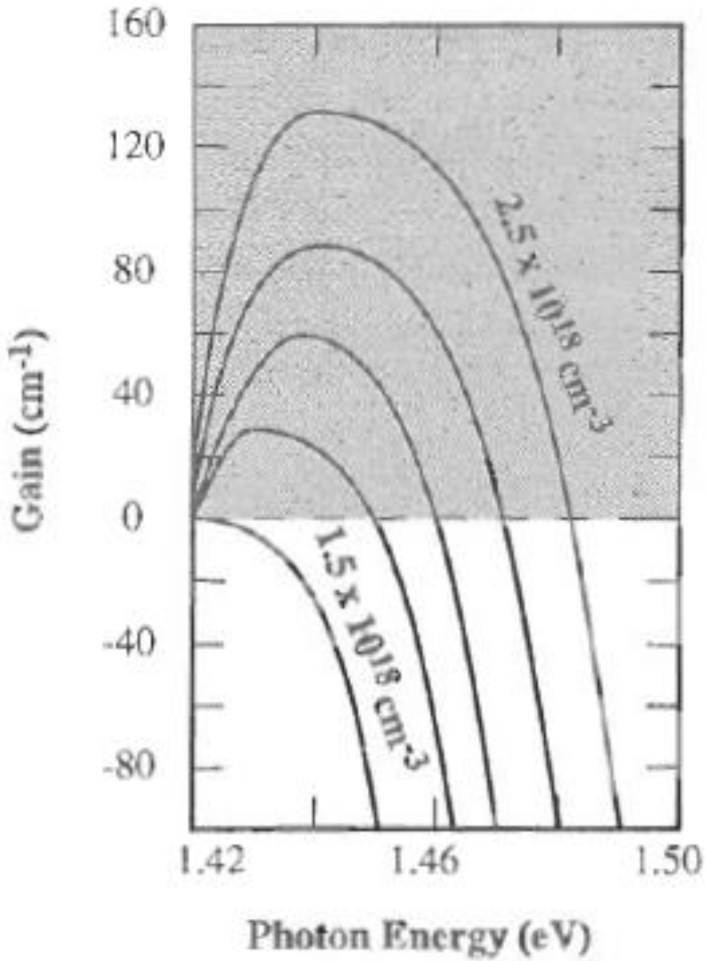
Für die Berechnung der Verstärkung als Funktion des injizierten Ladungsträger n(=p) muss die Elektronen- und Löcher-Quasi-Fermi-Niveaus und die Besetzungswahrscheinlichkeit $f^e(E^e)$ und $f^h(E^h)$ berechnet werden. Wegen der notwendigen Besetzungsinversion ist der Halbleiter entartet und die Boltzmann-Statistik ist nicht mehr ausreicht zur Beschreibung von $f^e(E^e)$ und $f^h(E^h)$ sondern es muß z.B. die Joyce-Dixon-Näherung zur Berechnung von $f^e(E^e)$ und $f^h(E^h)$ verwendet werden.

Die Lage der Quasi-Fermi-Niveaus ist nach Joyce-Dixon:

$$E_{Fn} = E_C + k_B T\cdot\left[\ln\frac{n}{N_C}+\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{n}{N_C}\right]$$

$$E_{Fp} = E_V - k_B T\cdot\left[\ln\frac{p}{N_V}+\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{p}{N_V}\right]$$

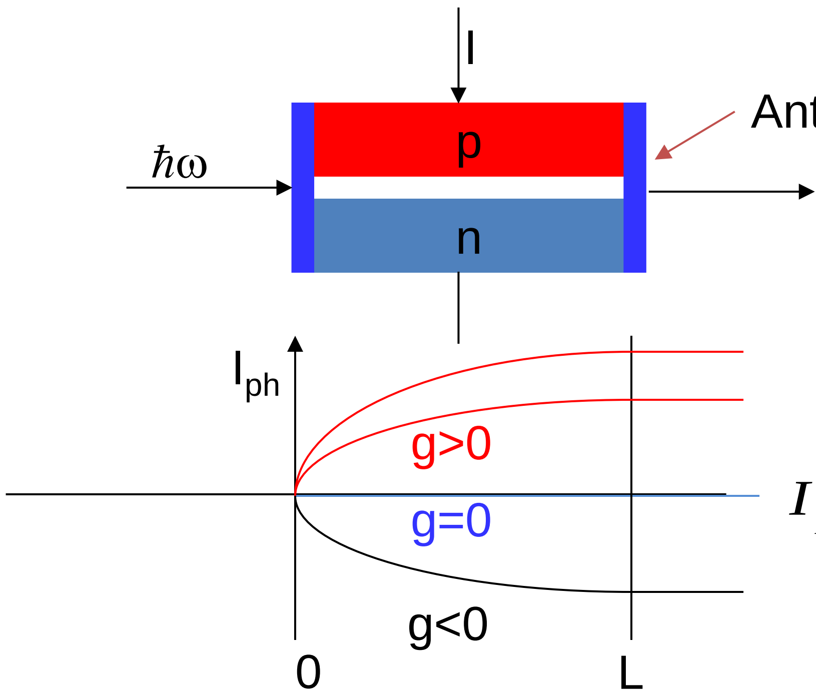
Verstärkung im Halbleiter



Gain vs. photon energy curves for a variety of carrier injections for GaAs at 300 K. The electron and hole injections are the same. The injected carrier densities are increased in steps of 0.25×10^{18} cm^{-3} from the lowest value shown.

- Erst ab einer kritischen injizierten Ladungsträgerdichte gibt es Verstärkung!
- negativer Gain bedeutet Abschwächung
- g = 0 bedeutet Transparenz (keine Verstärkung, keine Abschwächung)
- Je höher die injizierte Ladungsträgerkonzentration, desto höher kann die Photonenenergie werden, für die noch Verstärkung auftritt

Optische Halbleiterverstärker (OSA)



$$I_{ph} = I_{ph}^{0} \cdot \exp\left(-g(\hbar\omega) \cdot L\right)$$

Für den Fall $g(\hbar\omega) = 0$: → Transparenz

Bis jetzt haben wir nur den Materialgain diskutiert und dieser kommt aus dem aktiven Bereich wo Rekombination stattfindet. Oftmals ist dieser aktive Bereich von sehr kleiner Dimension (z.B. QW-Laser).

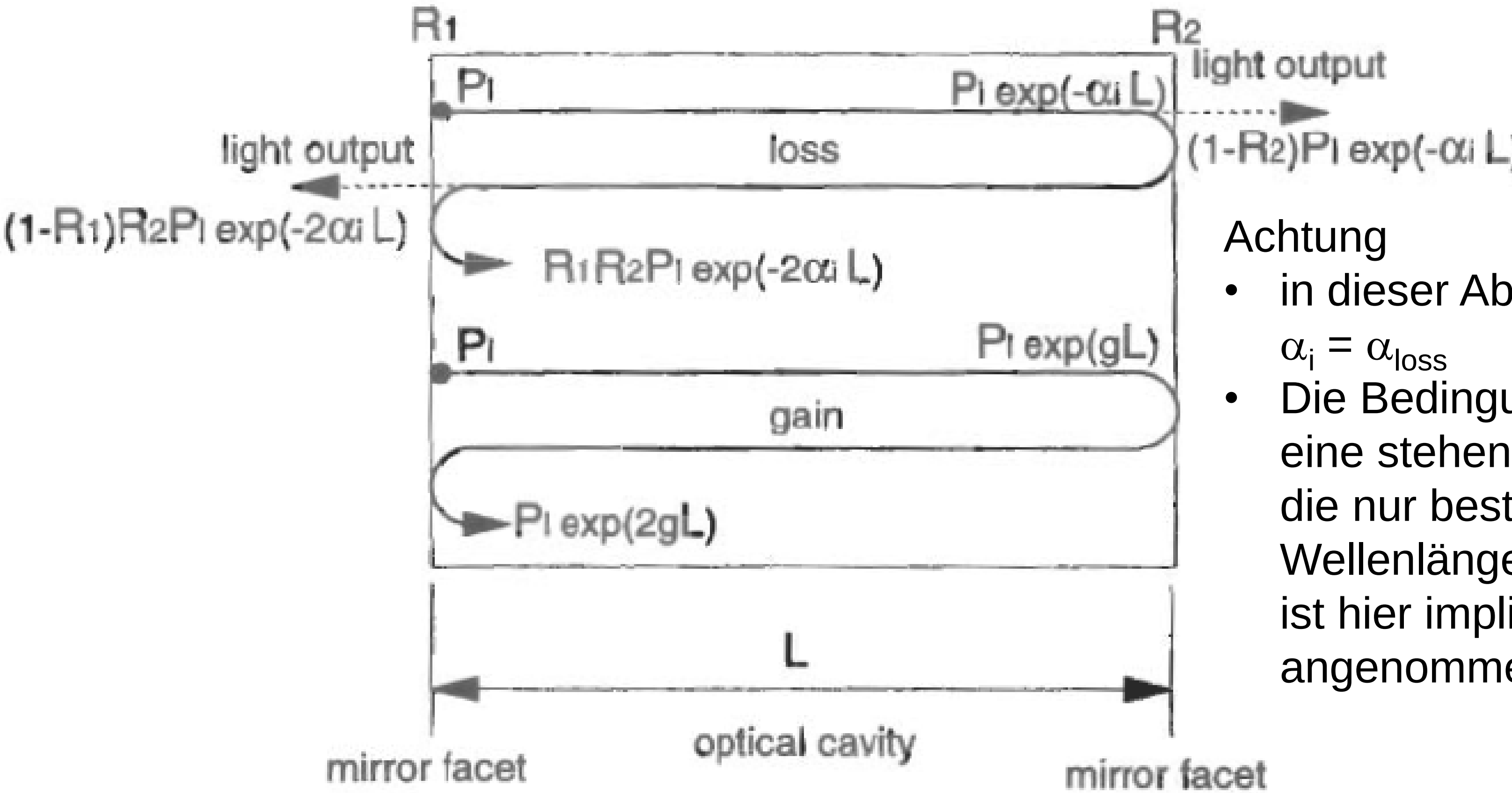
In diesem Fall muss jetzt die neue Größe Cavity Gain g_{cav} definiert werden, da nur in diesem Bereich aktiv verstärkt wird.

$$\boxed{g_{cav}(\hbar\omega) = g(\hbar\omega) \cdot \Gamma}$$

Γ = Mode confinement factor bezogen auf den aktiven Bereich

Lasing: Verluste und Verstärkung im Resonator

- Die Verluste an den Spiegeln hängen von der Reflektivität der Spiegel ab



Gain and loss in the optical cavity.

Achtung
- in dieser Abbildung $\alpha_i = \alpha_{loss}$
- Die Bedingung für eine stehende Welle, die nur bestimmte Wellenlängen erlaubt, ist hier implizit angenommen!

Laserschwelle

- Als Laserschwelle wird der Gesamt-Gain bezeichnet, bei dem die Verstärkung die Verlust gerade ausgleicht
- Für $g_{tot,th}$ ist die Intensität nach einem Umlauf im Resonator mit der Länge L und den Spiegelreflektivitäten (siehe letzte Folie) wieder die Startintensität I_0

Es gilt also:

$$I_0 = I_0 R_1 R_2 e^{g_{tot,th}(\omega)2L}$$

$$g_{th}(\omega)2L = \ln \frac{1}{R_1 R_2} = -\ln R_1 R_2$$

$$g_{tot,th}(\omega) = \Gamma g(\omega) - \alpha_{loss}(\omega) = -\frac{1}{2L} \ln R_1 R_2$$

$$\boxed{\Gamma g(\omega) = \alpha_{loss}(\omega) - \frac{1}{2L} \ln R_1 R_2}$$

- Diese Aussage gilt modenweise, d. h. manche Moden erfüllen die Bedingung und viele nicht

Verluste in GaAs-FB-Resonator

- Wir wollen abschätzen, wann die Resonatorverluste (α_{loss}) so groß sind wie die Spiegelverluste
- Für GaAs ergibt sich für α_{loss} etwa ein Wert von 20 cm^{-1}
- Für die Spiegelverluste muss man sich die GaAs-Luft-Grenzfläche bei senkrechtem Einfall anschauen

$$R = \frac{(n_{GaAs} - 1)^2}{(n_{GaAs} + 1)^2} = 0,33$$

$$\text{mit } n_{GaAs} = 3,66$$

- Damit ergibt sich

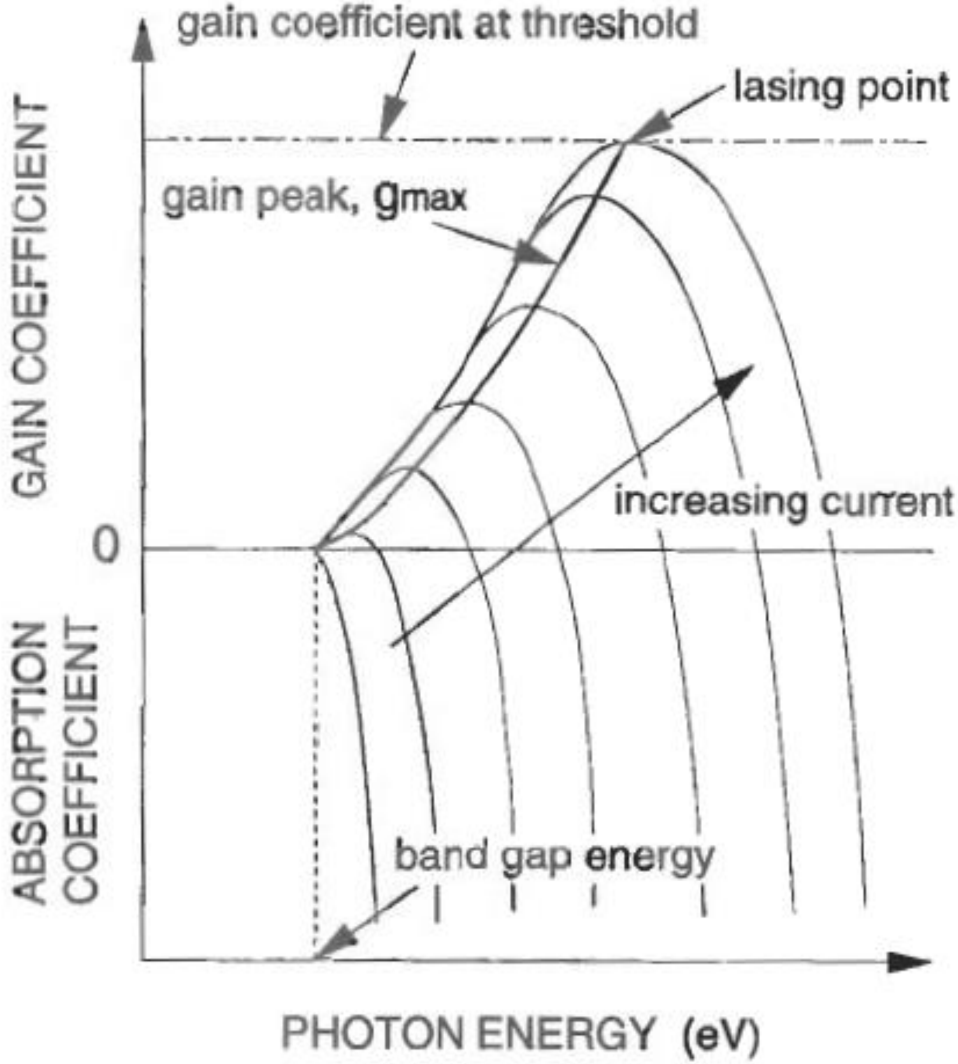
$$I_0 e^{-\alpha_{loss} 2L} = I_0 R^2$$

$$\alpha_{loss} 2L = -\ln R^2$$

$$L = -\frac{\ln R}{\alpha_{loss}} \quad => \quad L = -\frac{\ln 0,33}{20cm^{-1}} = 554\mu m$$

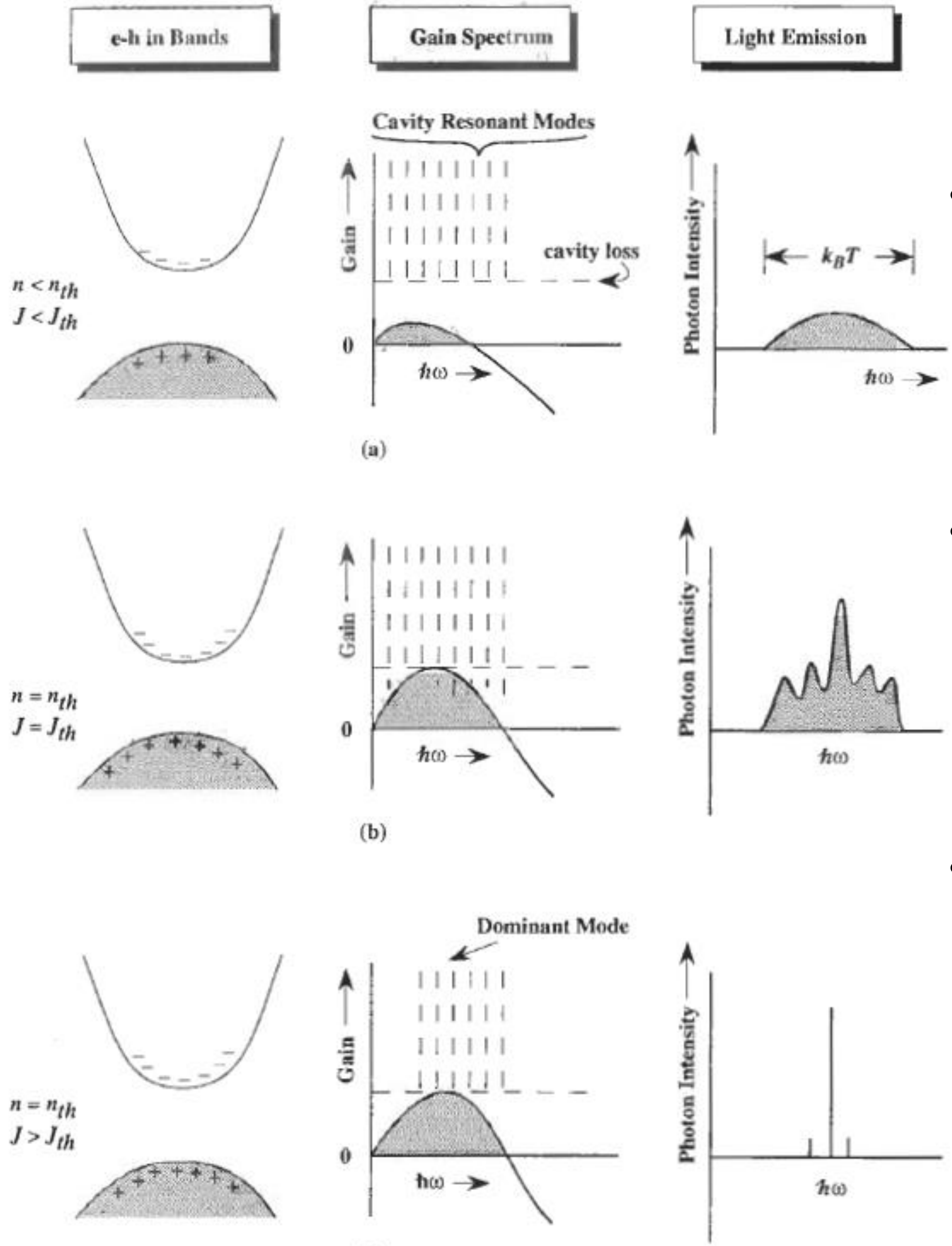
- In diesem Bereich liegen auch die Längen für typische Kantenemitter

Lasing: Änderung des Gain-Spektrums



An der Schwelle gleicht die Verstärkung gerade die Resonatorverluste aus!

Laserschwelle



- LD unter der Schwelle:
  - der Gain ist kleiner als die Resonatorverluste
  - Emission ist breit wie bei einer LED
- LD an der Schwelle:
  - einige wenige Moden beginnen zu dominieren
- LD über der Schwelle:
  - Gain-Spektrum ändert sich nicht
  - aufgrund stimulierter Emission dominiert ein (oder mehrere) Mode die Lichtemission

Unterhalb der Laserschwelle

- LD unter der Schwelle:
  Emission im Prinzip wie eine LED, aber es kommt wegen der Resonatorverluste weniger Licht aus dem Bauelement

- Es gilt
$$I_{Ph} = (1\text{-Verlust})(\eta \times \#\,\text{e-h-Paare/Sekunde})$$
$$= (1\text{-Verlust})(\eta \times \text{Elektronenstrom})$$

- Mit β_{loss} als Bruchteil der Photonen, die nicht aus dem Resonator entkommen kann man schreiben

$$I_{Ph} = (1-\beta_{loss})(\mathrm{R}_{\mathrm{spon}}\mathrm{Ad}_{\mathrm{laser}}) = (1-\beta_{loss})\eta\frac{I}{e}$$

$$\text{mit } A = \text{ Laserfläche, } d_{laser} = \text{ Dicke der aktiven Zone}$$

- Eine LD ist keine gut LED!!!

Oberhalb der Laserschwelle

- Mit Erhöhung des Stroms werden mehr Ladungsträger in die aktive Zone injiziert => die Verstärkung steigt.

- Für einige Photonenenergie (=Moden) wird die Schwellbedingung überschritten und die Photonendichte im Resonator baut sich auf.

- Bei weiterer Erhöhung des Stroms dominiert die stimulierte Emission über die spontane Emission
-
- Wird der Laser deutlich oberhalb der Schwelle betrieben, dominiert eine Mode ganz deutlich!

Lasing: Modenverteilung und Gain-Spektrum

Überlagerung von Modenverteilung und Gain-Spektrum bestimmte welche Moden verstärkt werden!

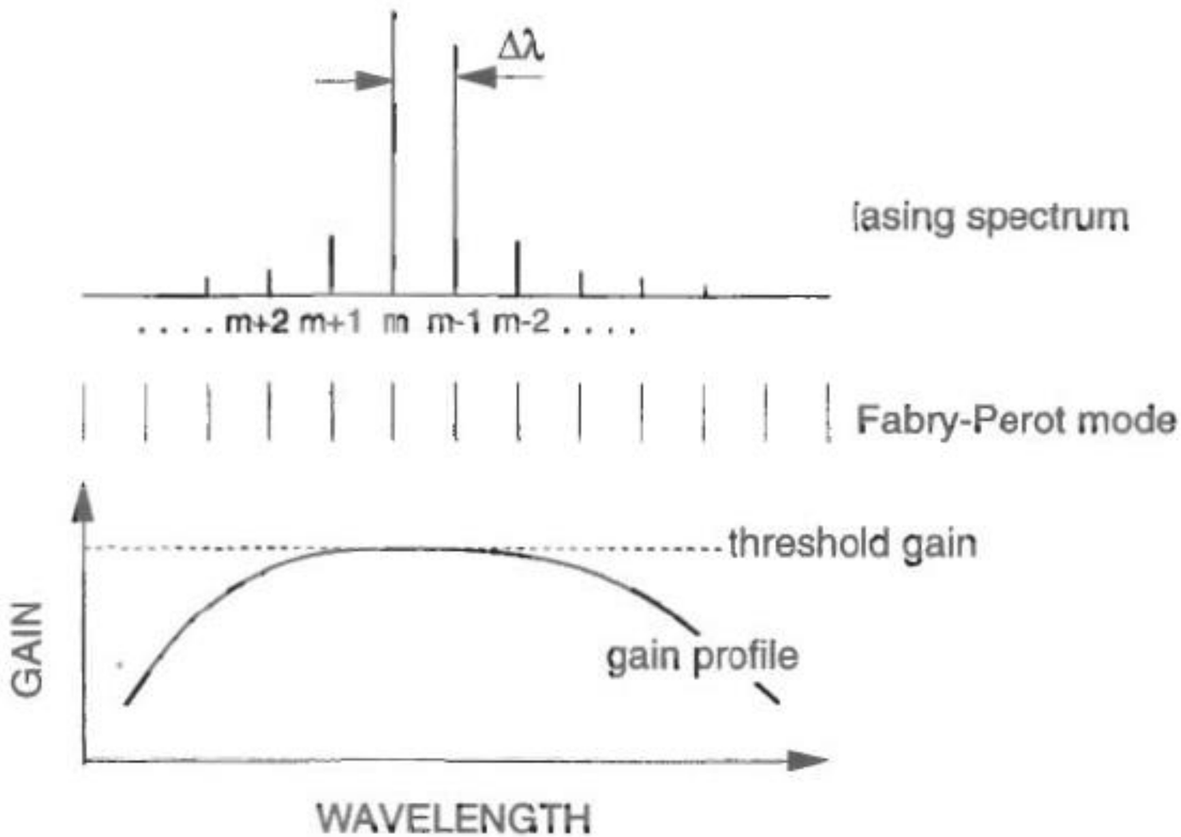
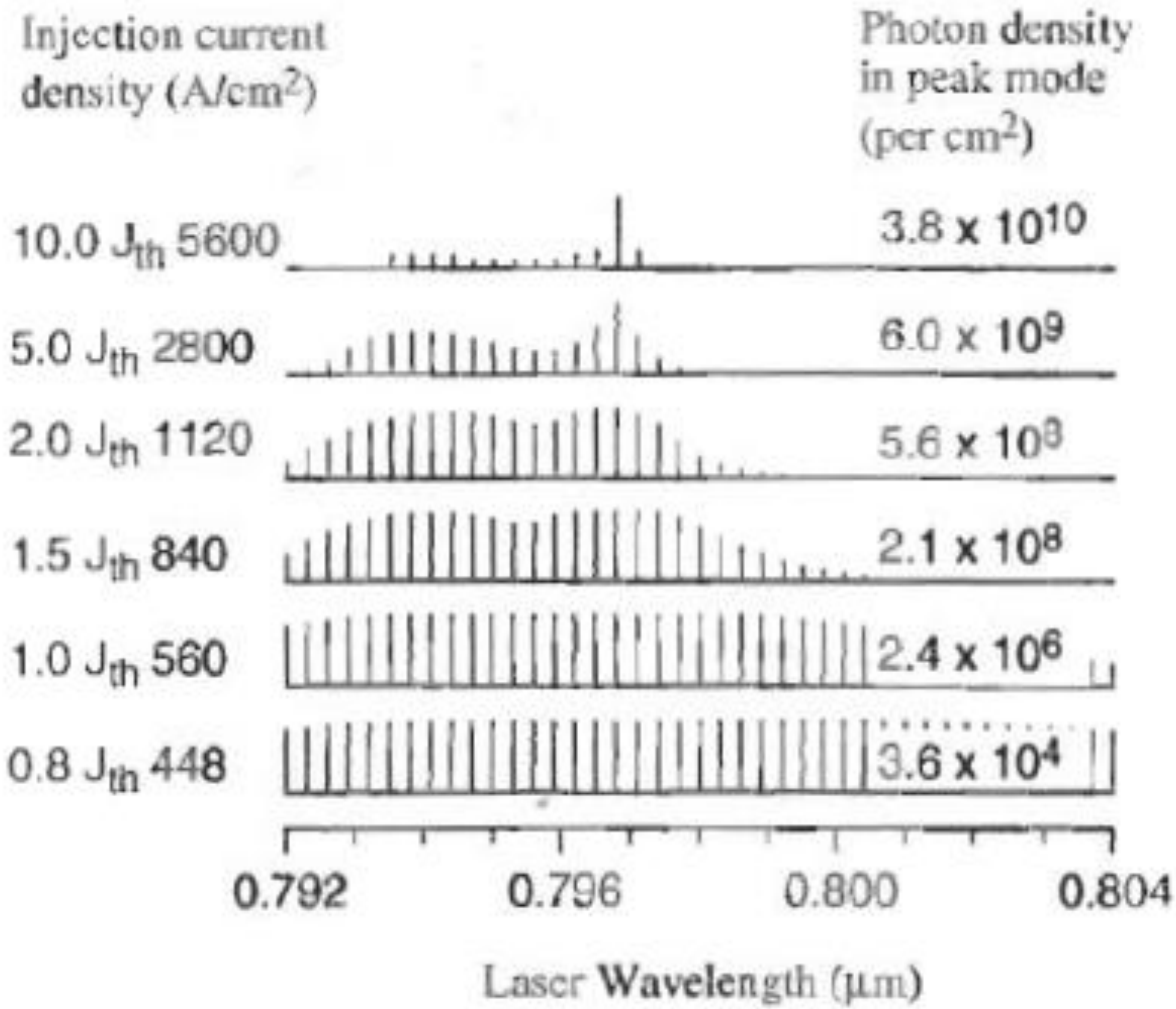


Illustration of gain profile and emission spectra (longitudinal modes).

Ausgangsspektrum QW-Laser

5 nm GaAs /$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$



J_{th}= 560 A/cm^2

Oberhalb der Laserschwelle

$$\frac{dS_m}{dt} = [\underbrace{\Gamma g(n_{2D}, \omega_m)}_{\text{stimulierte Emission}} - \underbrace{\alpha_c}_{\text{Resonator-verluste}}]\frac{c}{n_r} S_m - \underbrace{ßR_{spon}(n_{2D})}_{\text{spontane Emission}}$$

Für eine Mode m setzt sich die rechte Seite der Gleichung aus folgenden Beiträgen zusammen:

i. Stimulierte Emission:

$$\rho_{stim} = \text{cavity gain} \times \text{Lichtgeschwindigkeit} \times \text{Photonenzahl}$$

$$= \Gamma g(n_{2D}, \omega_m)\frac{c}{n_r} S_m$$

ii. Verluste (Absorption im Cladding und Spiegelverluste

$$\rho_{Verlust} = \alpha_c \frac{c}{n_r} S_m$$

dabei ergibt sich die mittlere Photonenlebensdauer oder Verweilzeit im Resonator zu

$$\frac{1}{\tau_{res}} = \alpha_c \frac{c}{n_r}$$

iii. Spontane Emission: $\rho_{spon} = \beta R_{spon}$

Oberhalb der Laserschwelle

- Der spontane Emissionsfaktor β gibt an, welcher Bruchteil der spontanen Emission im Mode m landet (also eigentlich β_m)
- Eine Abschätzung zeigt, dass β sehr klein ist:

Die spektrale Breite der spontanen Emission it ~kT.

Die Breite der Resonatormoden ist wenige μeV.

$$\beta \sim \frac{10^{-3}meV}{25meV} \sim 10^{-4}$$

Ratengleichungen für den Laser: Ladungsträger

- Man muss Photonen- und Ladungsträgersystem gekoppelt betrachten. Dies führt auf folgende Ratengleichung für die Ladungsträgerdichten:

$$\frac{dn_{2D}}{dt} = \underbrace{\frac{J_{rad}}{e}}_{\text{"}\textit{strahlende Stromdichte}\text{"}} - \underbrace{R_{spon,2D}}_{\text{spontane Emission}} - \underbrace{\frac{c}{n_r}\sum_m \Gamma g(n_{2D},\omega_m) S_m}_{\text{stimulierte Emission summiert über alle Moden}}$$

- Unter der „strahlenden“ Stromdichte, versteht man den Strom, der strahlend rekombiniert. Es gilt natürlich:

$$J_{rad} = J - J_{nr}$$

- Die „nichtstrahlende“ Stromdichte J_{nr} behandeln wir später

Steady-State-Ratengleichungen für den Laser

- Das gesamte gekoppelte Gleichungssystem lautet also:

$$\frac{dS_m}{dt} = [\Gamma g(n_{2D}, \omega_m) - \alpha_c] \frac{c}{n_r} S_m - ßR_{spon,2D}(n_{2D})$$

$$\frac{dn_{2D}}{dt} = \frac{J_{rad}}{e} - R_{spon,2D} - \frac{c}{n_r} \sum_m \Gamma g(n_{2D}, \omega_m) S_m$$

- Wenn man den „steady-state“-Zustand betrachtet, also S_m und n_{2D} konstant sind:

$$S_m = \frac{ßR_{spon,2D}(n_{2D})}{\frac{c}{n_r}[\Gamma g(n_{2D}, \omega_m) - \alpha_c]}$$

$$\frac{J_{rad}}{e} = R_{spon,2D} - \frac{c}{n_r} \sum_m \Gamma g(n_{2D}, \omega_m) S_m$$

Steady-State-Ratengleichungen für den Laser

Wenn man berücksichtigt, das gilt (per Definition):

$$0 = \Gamma g_{th}(\omega_m) - \alpha_c$$

Dann lässt sich die Gleichung für die Photonendichte schreiben als:

$$S_m = \frac{ßR_{spon,2D}(n_{2D})}{\frac{c}{n_r}[\Gamma g_{th}(\omega_m) - \Gamma g(n_{2D}, \omega_m)]} = \frac{ßR_{spon,2D}(n_{2D})n_r}{c\Gamma[g_{th}(\omega_m) - g(n_{2D}, \omega_m)]}$$

- Die Verstärkung g(ω) als Funktion der Energie hat ein Maximum
- Die Mode p für den zuerst die Schwelle erreicht wird, wird einen großen Teil der Photonen in sich konzentrieren (Nenner wird sehr klein)
- Was ist mit den benachbarten Moden?

Moden neben der Zentralmode

$$S_m = \frac{ßR_{spon,2D}(n_{2D})n_r}{c\Gamma[g_{th}(\omega_m) - g(n_{2D},\omega_m)]}$$

- Die Verstärkung in der Nähe von g_p kann für Energien E_s durch eine Taylorreihenentwicklung als Parabel dargestellt werden:

$$g(\lambda_s) = g(\lambda_p) - \frac{1}{2}\frac{d^2g}{d\lambda^2}(\lambda_s - \lambda_p)^2$$

- Wir der Injektionsstrom jetzt so erhöht, das g_p gegen g_{th} geht, so nimmt S_p sehr rasch zu!
- Für benachbarte Moden gilt

$$g(\lambda_s) = g_{th}(\lambda_p) - \frac{1}{2}\frac{d^2g}{d\lambda^2}(\lambda_s - \lambda_p)^2$$

- Diese Moden werden deutlich schwächer verstärkt.

Lasergleichungen: Diskussion I

$$\frac{J_{rad}}{e} = R_{spon,2D} - \frac{c}{n_r} \sum_m \Gamma g(n_{2D}, \omega_m) S_m$$

- Für niedrige Ströme ist die Photonendichte niedrig und der Gain kann vernachlässigt werden

$$\frac{J_{rad}}{e} = R_{spon,2D} \overset{!}{=} \frac{n_{2D}}{\tau_{rad}}$$

$$n_{2D} = \frac{J_{rad} \tau_{rad}}{e}$$

- Bei niedrigen Strömen ist die Elektronendichte also proportional zum Strom
- Keine Verstärkung, also auch keine Modenselektion

Lasergleichungen: Diskussion II

$$\frac{J_{rad}}{e} = R_{spon,2D} - \frac{c}{n_r}\sum_m \Gamma g(n_{2D},\omega_m) S_m$$

- Für einen bestimmten Strom erreicht die Elektronendichte einen Wert n_{th} bei dem der Gain g_{th} ist. Diese Stromdichte bezeichnet man als Schwellstromdichte.

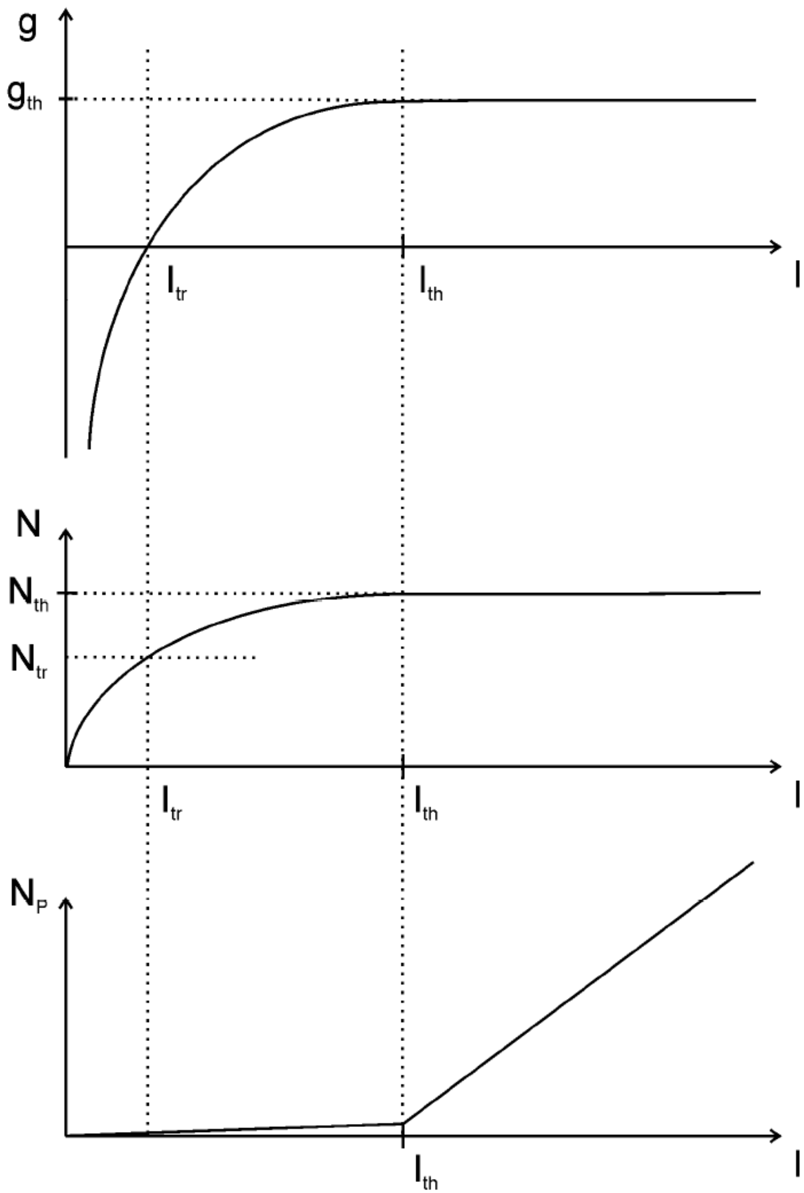
- Die Gleichgewichtsphotonendichte S_m in der Mode m steigt stark, da der Nenner gegen Null geht

$$S_m = \frac{ßR_{spon,2D}(n_{2D})n_r}{c\Gamma[g_{th}(\omega_m) - g(n_{2D},\omega_m)]}$$

Lasergleichungen: Diskussion III

- Für hohe Ströme gilt aber nicht mehr, dass n_{2D} proportional zum Strom ist, da sich durch die stimulierte Emission τ_{rad} signifikant verkürzt
- n_{2D} geht gegen n_{th} , aber überschreitet diesen Wert nicht (sonst würde S_m ja auch negativ)
- An und über der Laserschwelle gilt also: $n_{2D} \approx n_{th}$
- Auch der Gain bleibt bei g_{th} stehen, wenn die Stromdichte über J_{th} hinaus erhöht wird
- Die Photonendichte in der Mode m steigt aber mit zunehmenden Strom stark an, und zwar linear

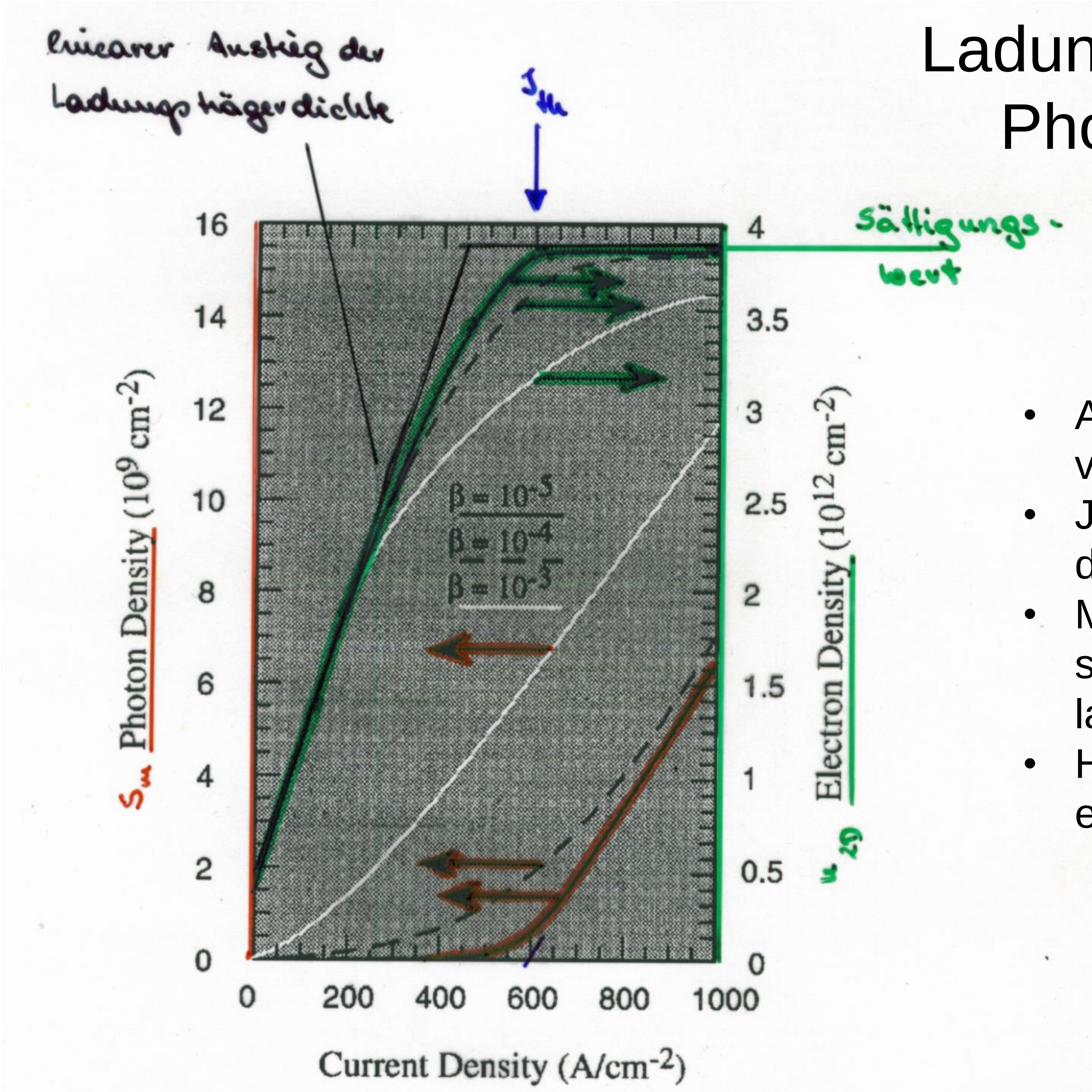
$$S_m = \frac{J_{rad} - J_{th}}{e} \tau_{res} \quad , \text{ mit } \tau_{res} = R\text{esonatorverweilzeit}$$



Verstärkung, Ladungsträgerdichte, Photonendichte

- I_{tr} ist der Strom bei dem der HL transparent wird ($g = 0$)

Ladungsträgerdichte, Photonendichte



- Auftragung für drei verschiedene β-Faktoren
- Je größer β desto kleiner der Schwellstrom
- Mehr Photonen über spontane Rekombination landen in der Mode
- Heute 10^{-4} bis 10^{-5} erreichbar

Schwellstromdichte

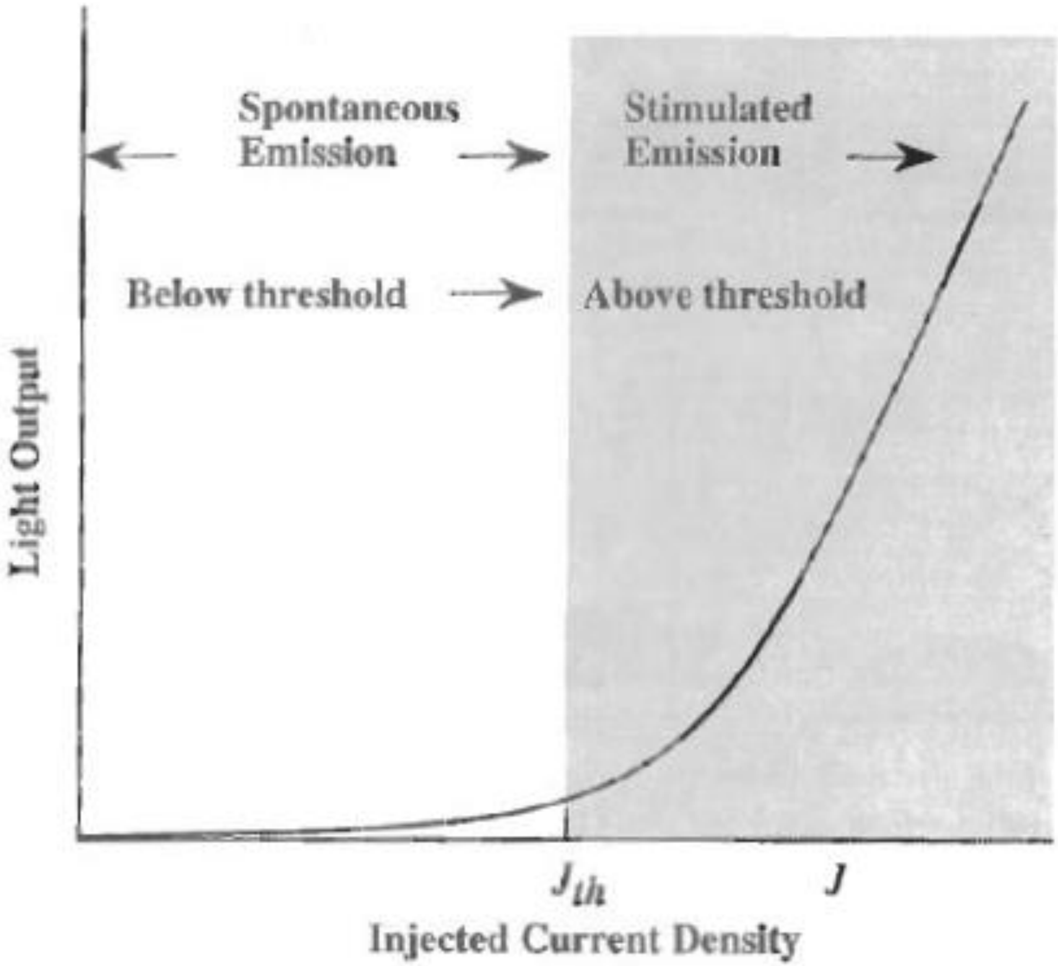
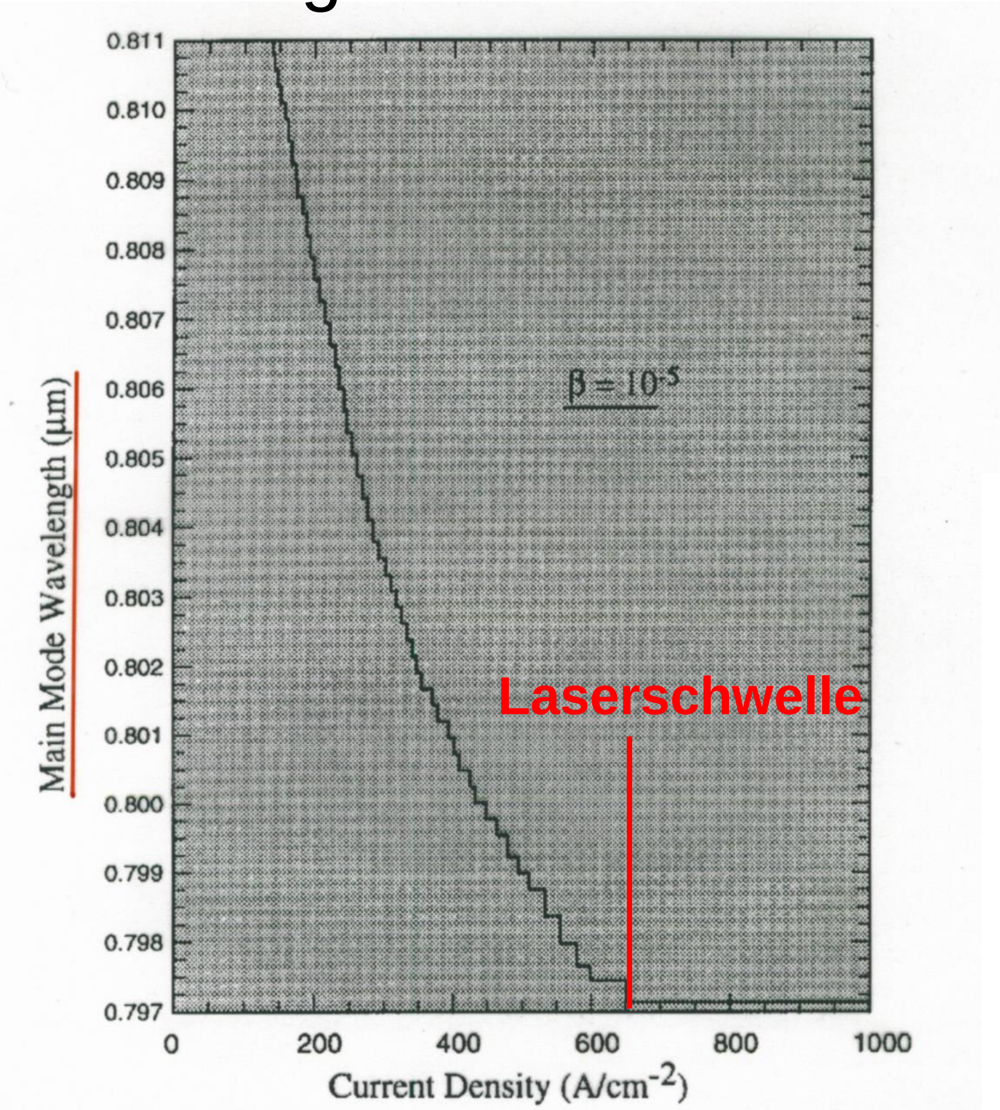


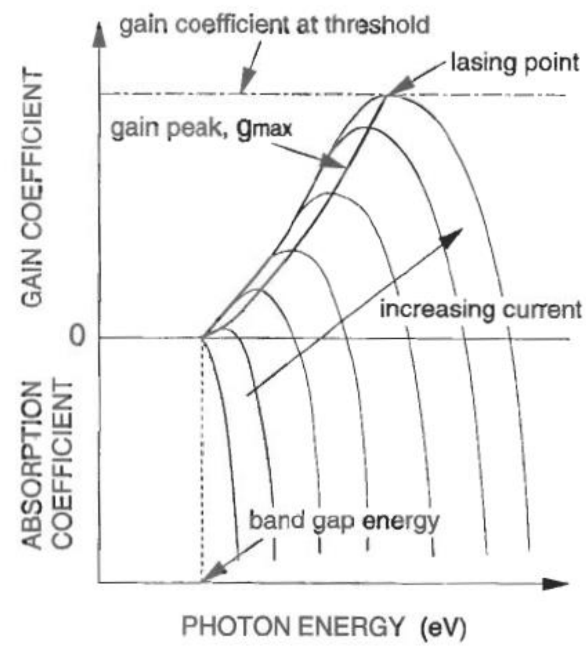
Figure 10.6: The light output as a function of current injection in a semiconductor laser. Above threshold, the presence of a high photon density causes stimulated emission to dominate.

- Die Laserschwelle spiegelt sich auch in der Licht-Strom-Charakteristik wieder
- Niedrige Schwellstromdichten wünschenswert

Stromabhängigkeit der Emissions-wellenlänge im FP-Resonator



- Laseremission verschiebt zu höheren Energien, da das Maximum in Gain-Spektrum verschiebt
- Ab der Laserschwelle ist die Wellenlänge der dominierenden Mode konstant, da Gain-Spektrum „gepinnt“ ist



Nichtstrahlende Prozesse

- Bisher haben wir nur den „strahlenden“ Strom betrachtet aber natürlich tragen auch nicht-strahlende Prozesse zum Strom bei

$$\boxed{J = J_{rad} + J_{nr}}$$

- Zwei Prozesse:
  - über Störstellen => für Laserstrukturen oft sehr niedrig
  - Auger-Prozesse => intrinsisch, wichtig bei hohen Ladungsträgerdichten
- Die Auger-Rate lässt sich schreiben als

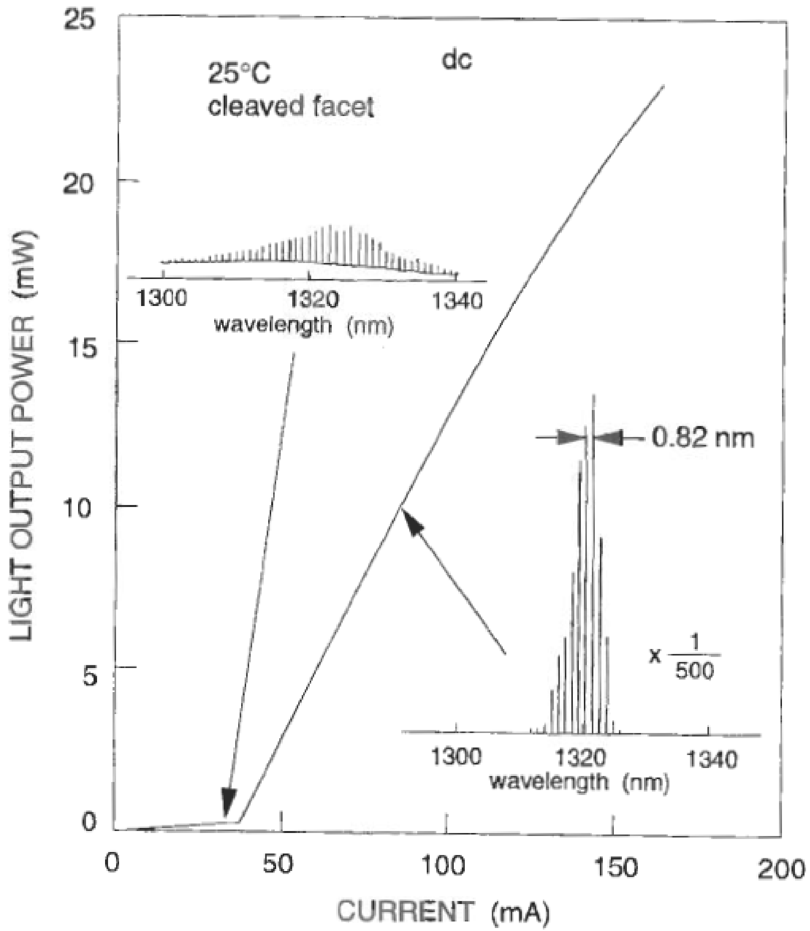
$$\boxed{R_{Auger} = Fn^3 \quad \text{mit } F = \text{ Auger-Koeffizient}}$$

- Damit gilt für die Beiträge zum Schwellstrom

$$\boxed{\begin{aligned} J_{rad,th} &= \frac{en_{th}d_{Laser}}{\tau_{rad}} \\ J_{nr,th} &= eFn_{th}d_{Laser} \\ J_{th} &= J_{rad,th} + J_{nr,th} \end{aligned}}$$

- n_{th} hängt nicht von nichtstrahlenden Prozessen ab! Wenn diese Dichte erreicht ist, ist die Resonatorverstärkung gleich der Resonatorverluste.

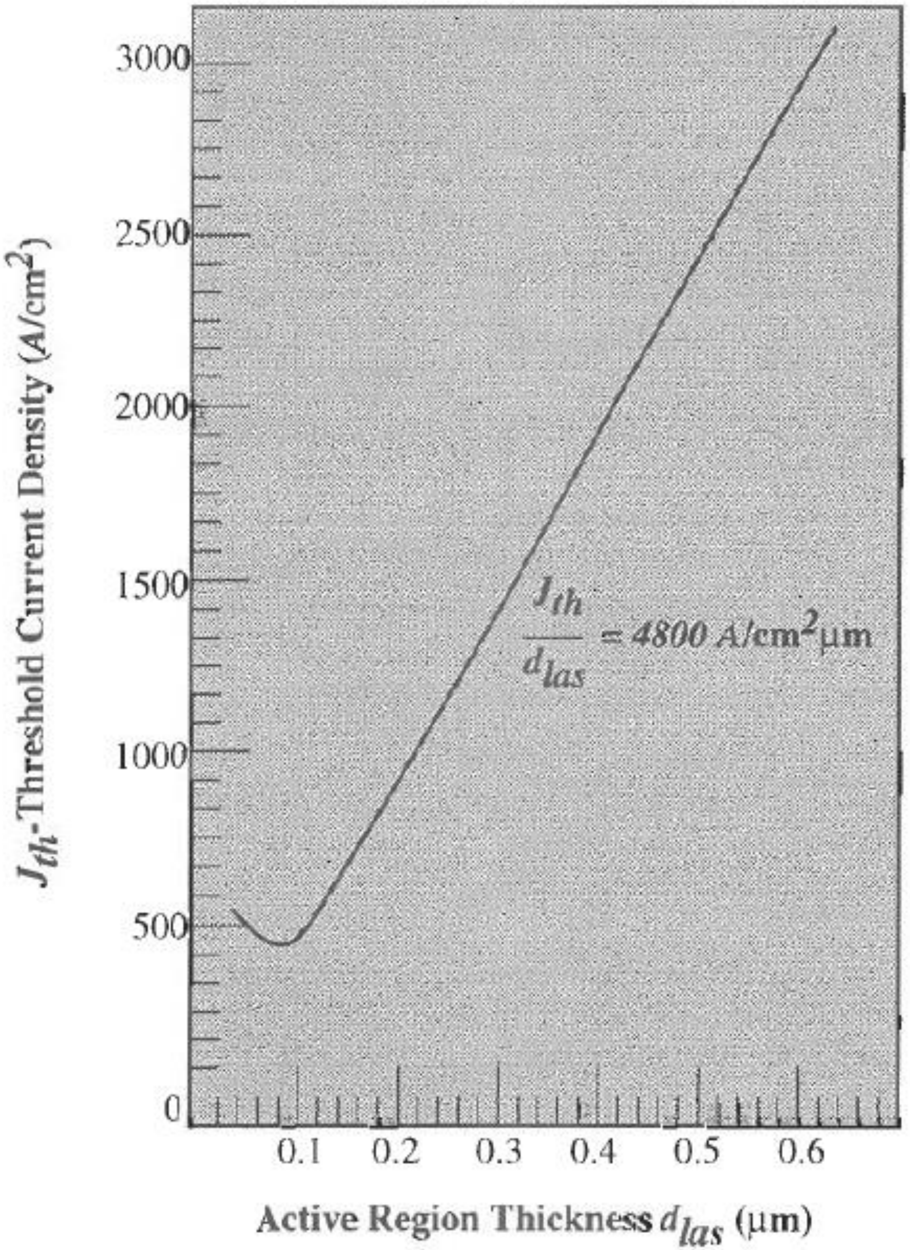
Licht-Strom-Charakteristik: Beispiel



- In diesem Beispiel Multimode-Lasing

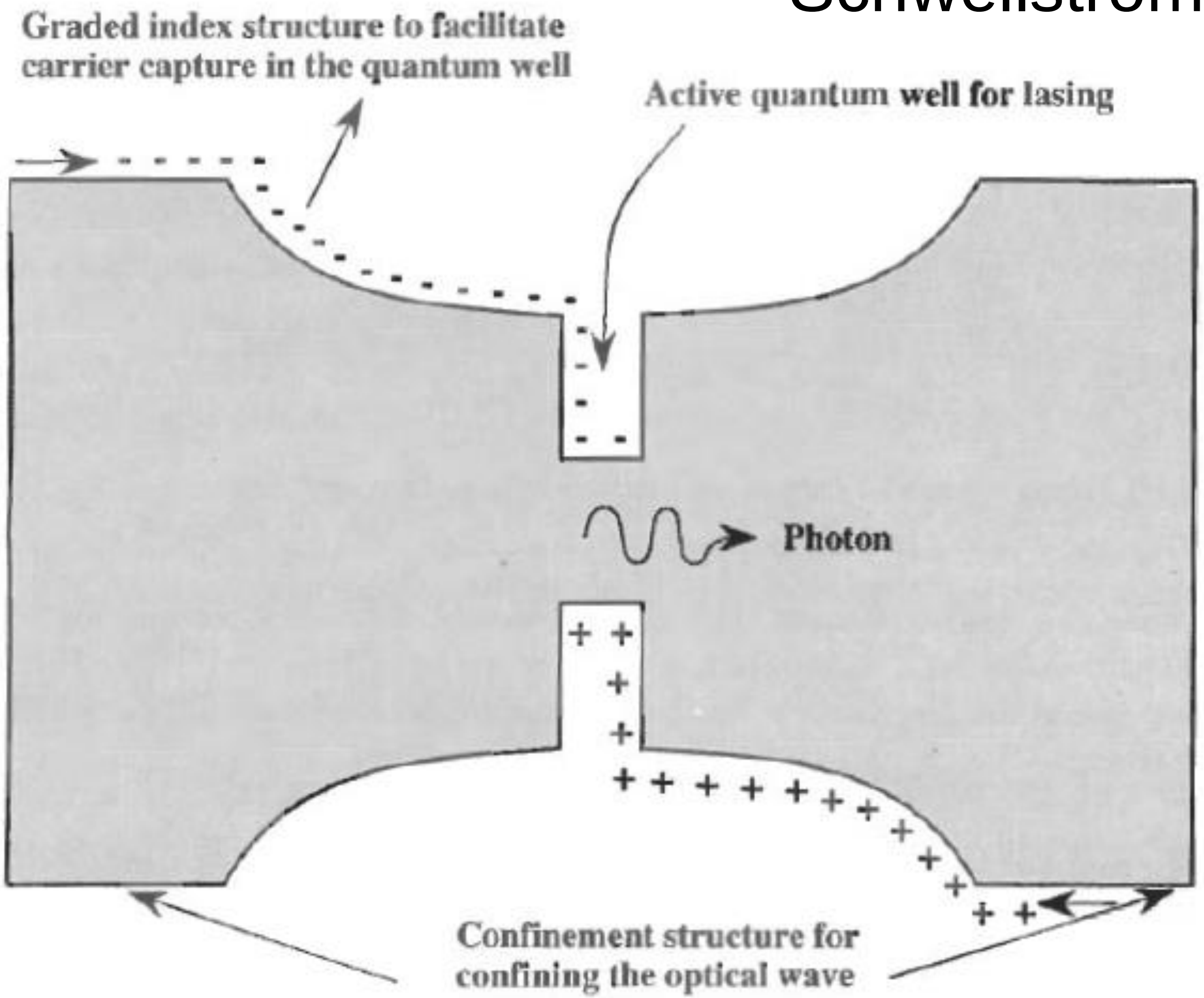
FIGURE 3.8 Emission spectra before and after lasing in a 1300 nm-band Fabry–Perot InGaAsP/InP laser diode with cleaved facets.[5] Reprinted with permission from *Reliability and Degradation of Semiconductor Lasers and LEDs* by Artech House, Inc., Norwood, MA, USA, http://www.artech-house.com.

Schwellstromdichte



Je dünner die aktive Schicht, desto niedriger die Schwellstromdichte

Schwellstromdichte



- QW-Strukturen ermöglichen niedrige Schwellstromdichten!
- QD-Strukturen ermöglichen noch niedrigere Schwellstromdichten!

Schwellstromdichte: Entwicklung

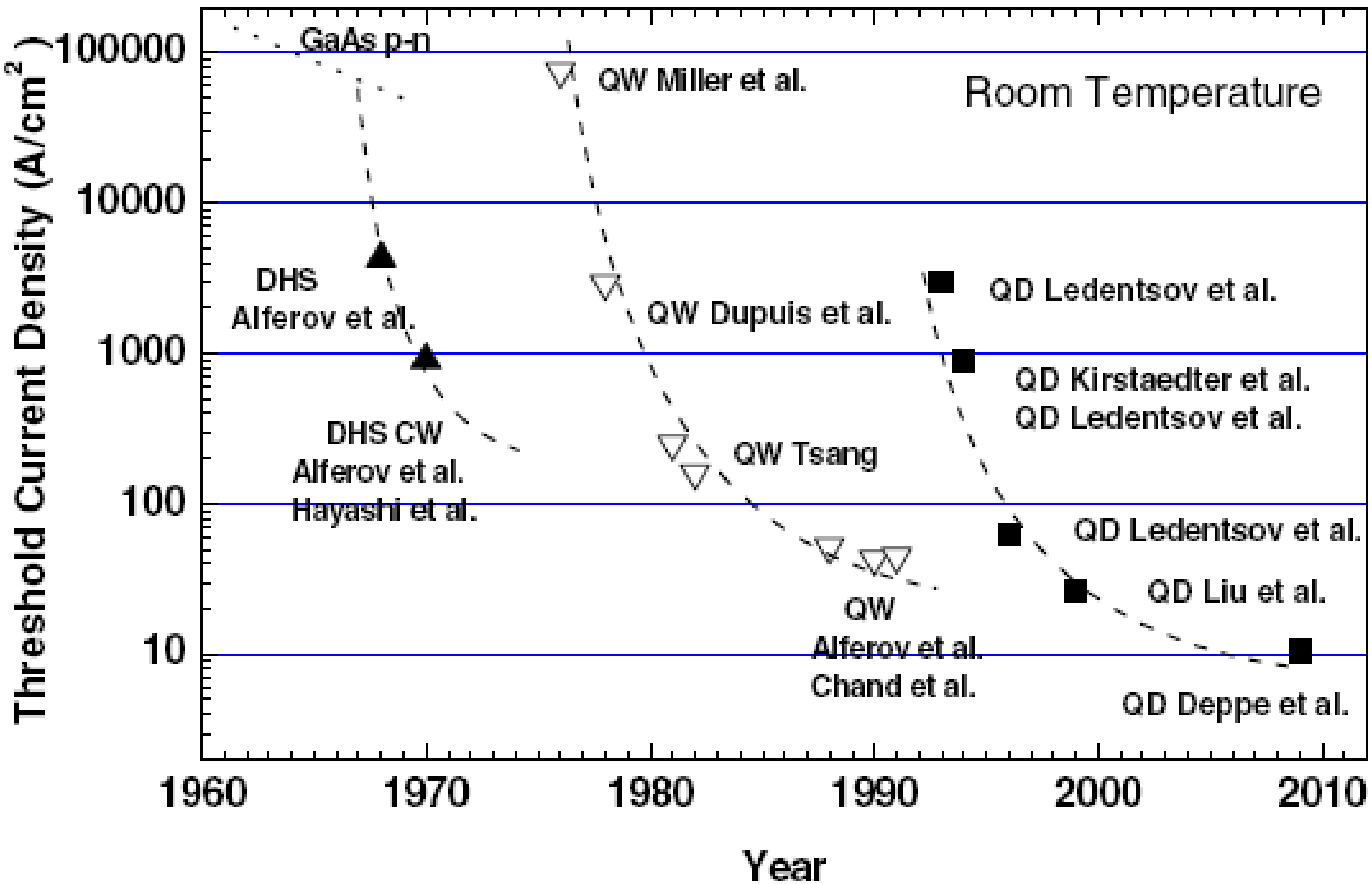


Figure 5. Historic trends in the reduction of the threshold current density in semiconductor lasers.